

Aspects de l'invariance conforme

Michel Bauer

August 20, 2001

Remerciements

L'idéal pour les remerciements d'une thèse serait de pouvoir en écrire de différents pour chaque exemplaire en fonction de son destinataire.

Depuis que j'ai décidé, à l'âge de dix-sept ans, de devenir chercheur, plusieurs rencontres importantes ont jalonné ma vie de jeune physicien. A des périodes différentes, trois personnes ont joué un rôle tout particulier. Elles n'ont jamais compté le temps qu'elles me consacraient et ont montré à mon égard une gentillesse que je n'oublie pas. C'est un plaisir pour moi de remercier André Eberhardt, qui m'a initié aux beautés de la physique, Edouard Brézin, qui m'a enseigné la théorie des champs d'une manière inoubliable, et Claude Itzykson qui m'a appris le métier de chercheur avec un enthousiasme communicatif, partageant avec moi à la fois ses connaissances et ses sujets de recherche: il a été pour moi un directeur de thèse, mais aussi bien plus que cela. Ces quelques mots ne sauraient leur exprimer toute ma gratitude.

Je voudrais remercier tout particulièrement Daniel Altschüler et Jean-Bernard Zuber. Ils se sont toujours intéressés à mon travail et ont bien voulu accepter, dans des conditions difficiles, la lourde tâche de rapporteurs.

Je remercie également les membres de mon jury, en espérant que tous auront eu quelque plaisir à lire cette thèse.

Je veux remercier aussi Jean-Marc Luck, qui après m'avoir supporté dans son bureau pendant toutes ces années a encore trouvé l'énergie de relire ces pages.

J'ai préparé cette thèse en travaillant à temps partiel au Centre d'Enseignement et de Recherche en Mathématiques Appliquées de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées et au Service de Physique Théorique de Saclay. L'accueil que j'ai trouvé dans ces deux laboratoires a été très chaleureux et je remercie Nicolas Bouleau pour le CERMA et Roger Balian puis André Morel pour le SPhT, ainsi que tous les membres des deux centres qui m'ont permis de vivre cette expérience très enrichissante.

Enfin je voudrais remercier Christine pour sa patience.

Contents

Introduction	ii
1 Variations sur le champ libre	1
1.1 Systèmes critiques à deux dimensions	1
1.2 Le champ libre	1
1.3 Opérateurs de vertex	3
1.4 Le tenseur énergie-impulsion	4
1.5 L'action de Liouville	10
1.6 De l'énergie-impulsion à la géométrie	15
1.7 Propriétés générales des théories conformes	17
2 Algèbres de courants	21
2.1 Introduction	21
2.2 Contraintes sur les coefficients	22
2.3 Illustration : Les fermions couplés à un champ de jauge	25
2.4 Le tenseur énergie-impulsion	27
3 Formalisme opératoire	30
3.1 Quantification radiale	30
3.2 Quelques résultats de la théorie des représentations	34
3.2.1 Cas de l'algèbre de Virasoro.	34
3.2.2 Cas des algèbres de Kac Moody	36
3.3 Algèbres chirales et théories rationnelles	41
4 Conditions aux limites	44
4.1 Fonction de partition sur le tore	44
4.2 Le champ libre sur le tore	45
4.3 Invariance conforme en géométrie semi-infinie	51
4.4 Transformations modulaires des caractères	53
4.5 Conditions aux limites et algèbre de Verlinde	55
5 Plongements conformes et dualité	61
5.1 La construction quotient abstraite	61
5.2 Plongements conformes	63

5.2.1	Les modèles minimaux unitaires	64
5.2.2	Transformations en bosons libres	64
5.3	La dualité $su(m)_n su(n)_m$	64
6	Le commutant	67
6.1	Préliminaires	68
6.2	Mécanique quantique finie	73
7	Digressions algébriques	77
7.1	Invariants des représentation des groupes finis	77
7.1.1	Le théorème fondamental de la théorie des invariants	78
7.1.2	Détour par les syzygies	79
7.1.3	La fonction génératrice de Poincaré	81
7.2	Quelques classifications ADE	83
7.2.1	Les algèbres de Lie simplement lacées	83
7.2.2	Les sous-groupes finis de $SU(2)$	84
7.2.3	Les singularités simples	84
7.2.4	Les invariants modulaires pour $su(2)$	87
7.2.5	Modèles intégrables et graphes	88
7.2.6	Perspectives	88
7.3	Vers la courbe quartique de Klein	88
7.3.1	Le théorème d'Hurwitz	88
7.3.2	Les courbes de genre 3 dans \mathbf{CP}^2	90
	Annexe: publications	95

Introduction

Les phénomènes critiques à deux dimensions sont depuis six ans l'objet d'une étude intense, après la percée décisive de Belavin, Polyakov et Zamolodchikov ([2]). Malgré cela, les problèmes non résolus abondent et il restera sans doute beaucoup de travail dans ce domaine pour les générations futures.

Les théories conformes sont aujourd'hui un sujet si vaste qu'une thèse ne saurait en donner une idée globale. J'ai pourtant tenu à présenter plusieurs chapitres vraiment introductifs, non que j'espère améliorer les exposés (excellents) qui abondent, mais simplement que je souhaite conserver une trace de ce que j'ai appris. Tant mieux si d'autres y trouvent quelque intérêt. Je me suis efforcé de retrouver les résultats connus par des voies inhabituelles, bien souvent pour me rendre compte que d'autres l'avaient fait avant moi. Le chapitre 1 part de l'exemple du champ libre dans l'approche fonctionnelle pour tenter de dégager en détail les caractéristiques générales des théories conformes. Il contient en parallèle une discussion du lien entre anomalies conformes et gravitationnelles à deux dimensions. Le chapitre 2 est consacré aux algèbres de courants, toujours dans une approche fonctionnelle. Au chapitre 3 commence l'exposé de la quantification radiale, qui va de pair avec une introduction à la théorie des représentations des algèbres qui apparaissent dans les théories conformes.

Le chapitre 4, complété par l'article 1, est une étude, par diverses approches, de l'effet des conditions aux limites sur les systèmes critiques en géométrie finie. Cette étude met en évidence les liens profonds avec l'étude des modèles intégrables à deux dimensions, ainsi que certaines relations entre conditions aux bords et algèbre des développements à courte distance. Le chapitre 5 rappelle quelques propriétés élémentaires de la construction de Goddard, Kent et Olive et des plongements conformes afin d'introduire la dualité niveau-rang entre $su(m)_n$ et $su(n)_m$, dont l'étude est l'objet des articles 2 et 3. Le chapitre 6 qui expose les résultats de l'article 5 est le fruit d'un combat de trois ans avec le problème de l'invariance modulaire, qui est à mon avis un des problèmes ouverts les plus importants du sujet. Mon grand regret est de n'avoir pas pu en donner une présentation vraiment pédagogique, mais peut-être le sujet est-il trop technique. Le chapitre 7 est un recueil de divers résultats liés à la théorie des invariants des représentations des groupes, à la fascinante prolifération des classifications ADE , et aux automorphismes des surfaces de Riemann. Le but était de montrer combien l'étude d'un cas très particulier (voir l'article 5) pouvait en mathématiques mettre le doigt sur une foule de problèmes généraux.

En rédigeant ces 7 chapitres, j'ai essayé de faire appel au minimum de connaissances extérieures (qui, si elles ne sont pas indispensables, doivent être néanmoins bien utiles). J'ai voulu être précis là où je n'étais pas rigoureux. Ceci a peut-être pour conséquence que certains passages sont arides. Le lecteur m'excusera s'il les trouve néanmoins intéressants.

Chapter 1

Variations sur le champ libre

1.1 Systèmes critiques à deux dimensions

Rappelons très succinctement quelques caractéristiques générales des points critiques en théorie des champs. Considérons une théorie des champs locale en un point critique en d dimensions. Elle possède une invariance par translation, rotation et dilatation, ce qui entraîne que le tenseur énergie-impulsion est conservé, symétrique, de trace nulle. Alors en fait la théorie est invariante dans toute transformation de coordonnées conservant les angles (dite transformation conforme). A plus de deux dimensions ces transformations sont rigides (si une transformation est conforme au voisinage d'un point alors elle est la restriction d'une transformation conforme globale). A deux dimensions en revanche la situation est plus riche, et si la théorie est locale elle doit avoir des propriétés d'invariance même dans une transformation conforme locale (qui en coordonnées complexes s'écrit comme une fonction holomorphe ou antiholomorphe). Plus précisément, si S est l'action, sa variation dans un changement de coordonnées $z \rightarrow z + f(z, \bar{z})$ est

$$\delta S = \frac{1}{\pi} \int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2i} [(\partial f)T_z^z + (\bar{\partial} \bar{f})T_{\bar{z}}^{\bar{z}} + (\bar{\partial} f)T_z^{\bar{z}} + (\partial \bar{f})T_{\bar{z}}^z]$$

Comme la métrique g^{ab} vaut $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ la symétrie et la nullité de la trace donnent $T_z^z = T_{\bar{z}}^{\bar{z}} = 0$ et

$$\delta S = \frac{1}{\pi} \int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2i} [(\bar{\partial} f)T_z^{\bar{z}} + (\partial \bar{f})T_{\bar{z}}^z]$$

où les propriétés d'invariance locale dans les transformations holomorphes sont claires. Nous allons commencer par en illustrer les conséquences dans le cas du champ libre.

1.2 Le champ libre

Le champ libre à deux dimensions, malgré sa simplicité apparente, illustre bien de nombreuses caractéristiques des théories invariantes conformes et permet des calculs très explicites. Il est à la base de la compréhension de modèles plus compliqués qu'il permet souvent de reformuler

au prix de quelques ‘contorsions’ (charges à l’infini, conditions aux limites, compactification du champ etc).

Nous allons l’utiliser ici pour dégager quelques propriétés simples des théories invariantes conformes, puis les liens entre les fonctions de corrélation du tenseur énergie-impulsion et l’action de Liouville.

On se propose de calculer l’ intégrale fonctionnelle suivante :

$$\langle F \rangle = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S(\varphi)} F(\varphi)$$

où F est une fonctionnelle de φ et

$$S(\varphi) = \int \frac{d^2x}{8\pi} (\nabla\varphi)^2$$

l’action du champ libre. On suppose que φ est un champ scalaire, et sa dimension canonique est 0. En notation complexe S s’écrit

$$\int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{4i\pi} \bar{\partial}\varphi \partial\varphi$$

où l’invariance dans une transformation holomorphe ou antiholomorphe des coordonnées est manifeste.

Commençons par la fonctionnelle suivante

$$Z(j, \bar{j}) = \langle \exp \int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2i} (j\partial\varphi + \bar{j}\bar{\partial}\varphi) \rangle$$

C’est une intégrale gaussienne, et en effectuant une translation sur φ de h vérifiant

$$\partial\bar{\partial}h = \pi(\partial j + \bar{\partial}\bar{j})$$

les termes linéaires en φ disparaissent. En utilisant alors

$$\bar{\partial} \frac{1}{z} = \pi \delta^{(2)}(z)$$

on obtient:

$$\begin{aligned} \ln Z(j, \bar{j}) &= \int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2i} \int \frac{d\bar{z}' \wedge dz'}{2i} \\ &\left(-\frac{1}{2} j(z, \bar{z}) \frac{1}{(z - z')^2} j(z', \bar{z}') \right. \\ &+ j(z, \bar{z}) \pi \delta^{(2)}(z - z') \bar{j}(z', \bar{z}') \\ &\left. - \frac{1}{2} \bar{j}(\bar{z}, z) \frac{1}{(\bar{z} - \bar{z}')^2} \bar{j}(\bar{z}', z') \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

d’où l’on déduit

$$\langle \partial\varphi(z, \bar{z}) \partial\varphi(z', \bar{z}') \rangle = -\frac{1}{(z - z')^2}$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{\partial}\varphi(z, \bar{z})\bar{\partial}\varphi(z', \bar{z}') \rangle &= -\frac{1}{(\bar{z} - \bar{z}')^2} \\ \langle \partial\varphi(z, \bar{z})\bar{\partial}\varphi(z', \bar{z}') \rangle &= \pi\delta^{(2)}(z - z') \end{aligned}$$

Bien sûr dans (1.1) les singularités en pôle double ne sont pas intégrables, il faut les interpréter comme dérivées au sens des distributions de pôles simples en faisant une intégration par partie.

Dans l'action de départ le champ φ est sans dimension, donc les fonctions de corrélation ci-dessus ont leur dimension naïve. La troisième montre que bien que $\partial\varphi$ ($\bar{\partial}\varphi$) soit holomorphe (resp. antiholomorphe) d'après les équations classiques donc aussi au sens de l'insertion dans les fonctions de corrélation il reste un terme de contact, le seul possible pour des raisons dimensionnelles. Les propriétés de factorisation permettent d'associer des dimensions droite et gauche $(h, \bar{h}) = (1, 0)$ pour $\partial\varphi$ et $(0, 1)$ pour $\bar{\partial}\varphi$.

1.3 Opérateurs de vertex

La théorie contient aussi des fonctionnelles de φ dont les fonctions de corrélation n'ont pas leur dimension naïve. Essayons par exemple d'évaluer

$$Z(j) = \langle \exp \int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2i} j\varphi \rangle$$

A nouveau ceci se calcule par une translation du champ φ de h vérifiant cette fois:

$$\partial\bar{\partial}h = -\pi j$$

dont une solution est

$$h(z, \bar{z}) = - \int \frac{d\bar{z}' \wedge dz'}{2i} \ln |z - z'|^2 j(z', \bar{z}')$$

Il faut être prudent car on intègre sur des champs s'annulant à l'infini, h doit donc vérifier cette condition ce qui impose que l'intégrale de j soit zéro. Alors on obtient pour $\ln Z(j)$:

$$-\frac{1}{2} \int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2i} \int \frac{d\bar{z}' \wedge dz'}{2i} j(z, \bar{z}) \ln |z - z'|^2 j(z', \bar{z}')$$

Désignons par $j_\epsilon(\xi, \bar{\xi})$ la distribution qui remplace les intégrales doubles par

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{|\xi-z|=\epsilon} \frac{dz}{z-\xi}$$

c'est à dire la distribution qui appliquée à une fonction test donne sa valeur moyenne sur le cercle de rayon ϵ centré en $\xi, \bar{\xi}$. La distribution

$$\sum_k i\alpha_k j_\epsilon(z_k, \bar{z}_k) \text{ où } \sum_k \alpha_k = 0$$

a bien une intégrale nulle, et approche une somme de distributions δ (le facteur i assure la décroissance des corrélations à l'infini). Si l'on calcule Z pour cette distribution la somme

double sur les points se sépare entre points distincts et points coïncidents. La première est non singulière pour $\epsilon = 0$. En remarquant que

$$\frac{1}{(2i\pi)^2} \oint \oint_{|z|=|z'|=\epsilon} \frac{dz dz'}{z z'} \ln |z - z'|^2 = \ln \epsilon^2$$

on définit la fonctionnelle renormalisée $V_\alpha(\xi, \bar{\xi}) = \text{“exp } i\alpha\varphi(\xi, \bar{\xi})\text{”}$ par

$$V_\alpha(\xi, \bar{\xi}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-\alpha^2} \exp \frac{1}{2i\pi} \oint_{|\xi-z|=\epsilon} \frac{dz}{z-\xi} i\alpha\varphi(z, \bar{z})$$

Les opérateurs V_α sont appelés opérateurs de vertex. On obtient alors le résultat

$$\langle \prod_k V_{\alpha_k}(z_k, \bar{z}_k) \rangle = \prod_{k < l} |z_k - z_l|^{2\alpha_k \alpha_l}$$

En particulier V_α a une dimension d'échelle α^2 due aux singularités à points coïncidents. Les fonctions de corrélation des V se factorisent en une partie holomorphe et antiholomorphe, ce qui permet de leur associer des dimensions droite et gauche $(h, \bar{h}) = (\frac{\alpha^2}{2}, \frac{\alpha^2}{2})$. Comme on peut considérer que la donnée de leurs fonctions de corrélation définit les opérateurs, cette factorisation permet de définir formellement des opérateurs de vertex dits chiraux, dont les fonctions de corrélation sont les parties holomorphes ou antiholomorphes des fonctions précédentes. Il est facile de voir comment se comportent les fonctions de corrélation des V_α lorsque deux arguments se rapprochent:

$$\begin{aligned} \langle V_\alpha(z, \bar{z}) V_{\alpha'}(z', \bar{z}') \prod_k V_{\alpha_k}(z_k, \bar{z}_k) \rangle = \\ |z - z'|^{2\alpha\alpha'} \langle V_{\alpha+\alpha'}(z, \bar{z}) \prod_k V_{\alpha_k}(z_k, \bar{z}_k) \rangle + \text{termes réguliers} \end{aligned}$$

On peut résumer ceci par le développement à courte distance (en toute rigueur il faudrait s'assurer de sa validité dans toutes les fonctions de corrélation pas seulement celles des V)

$$V_\alpha(z, \bar{z}) V_{\alpha'}(z', \bar{z}') = |z - z'|^{2\alpha\alpha'} V_{\alpha+\alpha'}(z, \bar{z}) + \text{termes réguliers}$$

Par les mêmes méthodes on peut vérifier que:

$$\begin{aligned} \langle \partial\varphi(z, \bar{z}) \partial\varphi(z', \bar{z}') \prod_k V_{\alpha_k}(z_k, \bar{z}_k) \rangle = \\ - \left(\frac{1}{(z - z')^2} + \sum_{k,l} \frac{\alpha_k}{z_k - z} \frac{\alpha_l}{z_l - z'} \right) \langle \prod_k V_{\alpha_k}(z_k, \bar{z}_k) \rangle \end{aligned}$$

1.4 Le tenseur énergie-impulsion

Dans un changement arbitraire infinitésimal de coordonnées $z' = z + \epsilon f(z, \bar{z})$ on vérifie que :

$$\delta S = -\epsilon \int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{4i\pi} (\bar{\partial}f(\partial\varphi)^2 + \partial\bar{f}(\bar{\partial}\varphi)^2)$$

Donc classiquement le tenseur énergie-impulsion, réponse du système à un changement de coordonnées, n'a que deux composantes non nulles qui sont respectivement holomorphe et antiholomorphe:

$$T(z, \bar{z}) = -\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 \quad \text{et} \quad \bar{T}(z, \bar{z}) = -\frac{1}{2}(\bar{\partial}\varphi)^2$$

Du point de vue de la théorie des champs T est un opérateur composite et il faut le renormaliser. On définit

$$T(z, \bar{z}) = -\frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \oint_{|\xi-z|=\epsilon} \frac{d\xi}{\xi-z} \partial\varphi(\xi, \bar{\xi}) \partial\varphi(z, \bar{z})$$

Cette opération préserve l'holomorphie et assure $\langle T \rangle = 0$. On vérifie alors que

$$(1.2) \quad \langle T(z, \bar{z}) \prod_k V_{\alpha_k}(z_k, \bar{z}_k) \rangle = \frac{1}{2} \langle \prod_k V_{\alpha_k}(z_k, \bar{z}_k) \rangle \sum_{k,l} \frac{\alpha_k \alpha_l}{(z_k - z)(z_l - z)}$$

Pour la généralisation ultérieure, remarquons que le second membre peut s'écrire

$$(1.3) \quad \left(\sum_k \frac{\alpha_k^2}{2(z - z_k)^2} + \frac{1}{z - z_k} \partial_{z_k} \right) \langle \prod_k V_{\alpha_k}(z_k, \bar{z}_k) \rangle$$

Faisant tendre z vers l'un des autres arguments on obtient le développement à courte distance:

$$T(z) V_{\alpha}(z', \bar{z}') = \left(\frac{\alpha^2}{2(z - z')^2} + \frac{1}{z - z'} \partial \right) V_{\alpha}(z', \bar{z}') + \text{termes réguliers}$$

On appelle les opérateurs V primaires car leur produit à courte distance avec T commence en $(z - z')^{-2}$ (le coefficient est en fait le poids conforme). En général il y a des termes plus singuliers.

La fonction à quatre points pour $\partial\varphi$ est d'après la fonction génératrice (1.1)

$$\frac{1}{(z_1 - z_2)^2} \frac{1}{(z_3 - z_4)^2} + \frac{1}{(z_1 - z_3)^2} \frac{1}{(z_2 - z_4)^2} + \frac{1}{(z_1 - z_4)^2} \frac{1}{(z_2 - z_3)^2}$$

On en déduit que

$$\langle T(z, \bar{z}) \partial\varphi(z_1, \bar{z}_1) \partial\varphi(z_2, \bar{z}_2) \rangle = -\frac{1}{(z_1 - z)^2 (z_2 - z)^2}$$

Faisant tendre z vers z_1 on obtient:

$$T(z, \bar{z}) \partial\varphi(z', \bar{z}') = \left(\frac{1}{(z - z')^2} + \frac{1}{z - z'} \partial \right) \partial\varphi(z', \bar{z}') + \text{termes réguliers}$$

qui montre que $\partial\varphi$ est aussi un champ primaire, le coefficient de $(z - z')^{-2}$ étant à nouveau le poids conforme. On voit également que

$$\langle T(z, \bar{z}) T(z', \bar{z}') \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{(z - z')^4}$$

ce qui montre que le tenseur énergie-impulsion n'est pas un champ primaire.

La fonctionnelle génératrice des corrélations de T est

$$Z(\mu) = \langle \exp \int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2i} \mu T \rangle$$

Les équations du mouvement classiques pour l'action

$$\int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{4i\pi} (\bar{\partial}\varphi\partial\varphi + \pi\mu(\partial\varphi)^2)$$

sont

$$[\bar{\partial} + \pi((\partial\mu) + \mu\partial)]\partial\varphi = 0$$

d'où l'on tire

$$[\bar{\partial} + \pi(2(\partial\mu) + \mu\partial)]T = 0$$

On s'attendrait à ce que $\delta Z/\delta\mu$ vérifie la même équation, mais à cause de la renormalisation de T il y a une anomalie que nous allons calculer. On note T_ϵ le tenseur énergie-impulsion régularisé. On calcule facilement la variation au premier ordre en $\lambda(z, \bar{z})$ de

$$Z_\epsilon(\mu) = \langle \exp \int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2i} \mu T_\epsilon \rangle$$

lorsqu'on effectue une translation de la variable d'intégration φ de $\lambda(\partial\varphi)_{\epsilon'}$, où l'on désigne par g_ϵ la quantité

$$\oint_{|\xi|=\epsilon} \frac{d\xi}{2i\pi\xi} g(z + \xi, \bar{z} + \bar{\xi})$$

On en déduit l'identité suivante

$$(1.4) \quad \langle (\partial\varphi)_{\epsilon'} [\bar{\partial}\partial\varphi + \frac{\pi}{2}\partial(\mu(\partial\varphi)_\epsilon + (\mu\partial\varphi)_\epsilon)] \exp \int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2i} \mu T_\epsilon \rangle = 0$$

Ajoutant cette identité à

$$[\bar{\partial} + \pi(2\partial\mu + \mu\partial)] \frac{\delta Z_\epsilon}{\delta\mu}$$

on obtient

$$(1.5) \quad \oint_{|\xi|=\epsilon} \frac{d\xi}{2i\pi\xi} \oint_{|\xi'|=\epsilon'} \frac{d\xi'}{2i\pi\xi'} \langle \Gamma(z, \xi, \xi') \exp \int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2i} \mu T_\epsilon \rangle$$

avec

$$\begin{aligned} \Gamma(z, \xi, \xi') &= \bar{\partial}\partial\varphi(z)\partial\varphi(z + \xi') - \frac{1}{2}\bar{\partial}\partial\varphi(z)\partial\varphi(z + \xi) - \frac{1}{2}\bar{\partial}\partial\varphi(z + \xi)\partial\varphi(z) \\ &+ \frac{\pi}{2}\partial\varphi(z + \xi')\partial(\mu(z)\partial\varphi(z + \xi) + \mu(z + \xi)\partial\varphi(z + \xi)) - \frac{\pi}{2}(\mu\partial + 2\partial\mu)\partial\varphi(z)\partial\varphi(z + \xi) \end{aligned}$$

où l'on n'a pas fait figurer explicitement la dépendance dans les variables antiholomorphes. On remarque alors que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{|\xi|=\epsilon} \frac{d\xi}{2i\pi\xi} \xi^m \bar{\xi}^n = 0$$

sauf pour $m = n = 0$. Si dans Γ on pose naïvement $\xi = \xi' = 0$ on obtient 0 ce qui implique que les contractions de Γ avec l'autre terme contiennent des puissances positives de ξ ou ξ' . Donc à la limite où ϵ et ϵ' tendent vers zéro (1.5) se factorise et vaut

$$\oint_{|\xi|=\epsilon} \frac{d\xi}{2i\pi\xi} \oint_{|\xi'|=\epsilon'} \frac{d\xi'}{2i\pi\xi'} \langle \Gamma(z, \xi, \xi') \rangle \langle \exp \int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2i} \mu T_\epsilon \rangle$$

Par chance $\langle \Gamma(z, \xi, \xi') \rangle$ est facile à calculer. Tous les termes contenant un $\bar{\partial}$ disparaissent (on peut alors poser directement $\xi' = 0$), il reste ceux en μ qui donnent après intégration sur ξ

$$[\bar{\partial} + \pi(2\partial\mu + \mu\partial)] \frac{\delta Z}{\delta\mu} = -\frac{\pi}{12} \partial^3 \mu Z$$

ou encore, en termes de $W = \ln Z$

$$(1.6) \quad [\bar{\partial} + \pi(2\partial\mu + \mu\partial)] \frac{\delta W}{\delta\mu} = -\frac{\pi}{12} \partial^3 \mu$$

Le second membre n'existe pas classiquement, c'est une anomalie quantique dans laquelle est codée l'essence des théories conformes.

On peut sans difficulté supplémentaire généraliser cette équation en insérant d'autres fonctionnelles du champ dans la valeur moyenne. Par exemple pour

$$Z(\mu, j) = \langle \exp \int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2i} (\mu T_\epsilon + j\varphi) \rangle$$

où j est d'intégrale nulle, on obtient comme précédemment une identité en effectuant une translation de la variable φ de $\lambda(\partial\varphi)_{\epsilon'}$. Ceci rajoute un terme en $j(\partial\varphi)_{\epsilon'}$ à l'équation (1.4). Après un calcul semblable au précédent on obtient

$$[\bar{\partial} + \pi(2\partial\mu + \mu\partial)] \frac{\delta W}{\delta\mu} = \pi j \partial \frac{\delta W}{\delta j} - \frac{\pi}{12} \partial^3 \mu$$

Évaluant par exemple cette équation pour $\mu = 0$ et transformant en équation intégrale, il vient

$$\begin{aligned} & \langle T(z, \bar{z}) \exp \int \frac{d\bar{\xi} \wedge d\xi}{2i} j\varphi \rangle = \\ & - \int \frac{d\bar{\xi} \wedge d\xi}{2i} \frac{j(\xi, \bar{\xi})}{z - \xi} \partial_\xi \int \frac{d\bar{\xi}' \wedge d\xi'}{2i} \ln |\xi - \xi'|^2 j(\xi', \bar{\xi}') \langle \exp \int \frac{d\bar{\xi} \wedge d\xi}{2i} j\varphi \rangle \end{aligned}$$

Après symétrisation sur $j(\xi, \bar{\xi})$ et $j(\xi', \bar{\xi}')$ on trouve dans le second membre

$$-\frac{1}{2} \int \frac{d\bar{\xi} \wedge d\xi}{2i} \int \frac{d\bar{\xi}' \wedge d\xi'}{2i} \frac{j(\xi, \bar{\xi})}{z - \xi} \frac{j(\xi', \bar{\xi}')}{z - \xi'} \langle \exp \int \frac{d\bar{\xi} \wedge d\xi}{2i} j\varphi \rangle$$

On passe alors sans problème aux opérateurs de vertex pour retrouver l'équation (1.2) en choisissant pour j une superposition de fonctions δ régularisées.

Si l'on met une source pour $\partial\varphi$ on obtient pour la fonctionnelle

$$Z(\mu, j) = \langle \exp \int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2i} (\mu T_\epsilon + j \partial\varphi) \rangle$$

l'équation suivante

$$(1.7) \quad [\bar{\partial} + \pi(2\partial\mu + \mu\partial)] \frac{\delta W}{\delta\mu} = \pi(j\partial \frac{\delta W}{\delta j} - \partial(j \frac{\delta W}{\delta j})) - \frac{\pi}{12} \partial^3 \mu$$

Mais on remarque aussi que

$$-(2\partial\mu + \mu\partial) \frac{\delta W}{\delta\mu} = \mu\partial \frac{\delta W}{\delta\mu} - 2\partial(\mu \frac{\delta W}{\delta\mu})$$

A la vue de ces exemples, il est tentant de généraliser ces identités en mettant, si j est la source pour un champ primaire, le poids conforme holomorphe de ce champ en facteur du terme $\partial(j\delta W/\delta j)$ dans (1.7). Si l'on applique ceci au premier ordre en j pour une source d'opérateurs de vertex on retrouve simplement l'équation (1.3), ce qui est rassurant.

Revenons maintenant à la résolution de l'équation (1.6). Quelques transformations sont nécessaires. La difficulté vient entre autre du fait que $\delta Z/\delta\mu$ est non local en μ . Pour y remédier on fait le changement de fonction suivant:

$$\mu = -\frac{1}{\pi} \frac{\bar{\partial} f}{\partial f}$$

Ce changement est non univoque, et il est amusant de remarquer que la somme ou le produit de deux solutions est encore une solution (l'équation est linéaire à la fois en f et $\ln f$). On vérifie aisément que

$$\delta\mu = -\frac{1}{\pi \partial f} (\bar{\partial} + \pi\mu\partial) \delta f$$

d'où par des intégrations par parties

$$[\bar{\partial} + \pi(2\partial\mu + \mu\partial)] \frac{\delta}{\delta\mu} = \pi \partial f \frac{\delta}{\delta f}$$

On a donc remplacé un opérateur différentiel par une multiplication comme en transformation de Fourier. On obtient donc

$$\frac{\delta W}{\delta f} = -\frac{1}{12} \frac{1}{\partial f} \partial^3 \bar{\partial} f$$

On est alors amené à considérer la fonctionnelle de Wess et Zumino associée à l'anomalie:

$$-\frac{1}{12} \int_0^1 dt \int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2i} \frac{1}{\partial f_t} \left(\partial^3 \frac{\bar{\partial} f_t}{\partial f_t} \right) \frac{\partial f_t}{\partial t}$$

en ajoutant une dépendance formelle de f en une nouvelle variable t , en plus de z et \bar{z} . Cette fonctionnelle vaut

$$\int_0^1 dt \int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2i} \frac{\delta W}{\delta f} \frac{\partial f_t}{\partial t} = \int_0^1 \frac{dW(f_t)}{dt} dt = W(f_1) - W(f_0)$$

et décrit donc une théorie ayant un caractère topologique dans ce sens que les équations du mouvement sont identiquement nulles (on peut formuler la théorie sur une variété à trois dimensions plus compliquée qu'un simple produit du plan et d'un intervalle, et dans ce contexte le caractère topologique se met à jouer un rôle non trivial). En choisissant habilement la dépendance en t de f_t de façon à pouvoir calculer explicitement l'intégrale on peut obtenir une forme fermée pour W . Plus simplement un calcul assez pénible mais sans difficultés permet de vérifier que la fonctionnelle

$$\frac{1}{24} \int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2i} \frac{\bar{\partial} f}{\partial f} \partial \frac{\partial^2 f}{\partial f}$$

a la même dérivée variationnelle que W . Cette expression peut encore s'écrire

$$(1.8) \quad \frac{1}{24} \int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2i} \mu \partial^2 \alpha$$

où α vérifie

$$(1.9) \quad (\bar{\partial} + \pi \mu \partial) \alpha = -\pi \partial \mu$$

On peut choisir pour α une solution de (1.9) qui tend vers zéro avec μ , c'est à dire transformer (1.9) en équation intégrale, ce qui permet un développement de (1.8) en puissances de μ analogue à celui de Born en théorie de la diffusion, dont on peut vérifier que les premiers termes coïncident avec ceux obtenus en faisant le même développement dans l'équation intégrale associée à (1.6). Faisons le explicitement jusqu'à l'ordre 3. D'après (1.8) la fonction à deux points est

$$\frac{1}{24} \left(\partial_{z_1}^2 \partial_{z_2} \frac{1}{z_1 - z_2} + \partial_{z_1} \partial_{z_2}^2 \frac{1}{z_2 - z_1} \right)$$

tandis que d'après (1.6) cette fonction à deux points vaut

$$\frac{1}{24} \left(\partial_{z_2}^3 \frac{1}{z_1 - z_2} + \partial_{z_1}^3 \frac{1}{z_1 - z_2} \right)$$

expressions qui coïncident et dont la partie méromorphe (c'est à dire sans la partie distribution) est

$$\frac{1}{2(z_1 - z_2)^4}$$

Pour les fonctions à trois points les deux expressions sont les symétrisés sur z_1, z_2, z_3 de

$$-\frac{1}{24} \partial_{z_1}^2 \frac{1}{z_1 - z_2} \partial_{z_2} \partial_{z_3} \frac{1}{z_2 - z_3}$$

et

$$\frac{1}{18} \left(2 \partial_{z_3}^3 \partial_{z_2} \frac{1}{(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)} - \frac{1}{z_1 - z_2} \partial_{z_3}^3 \partial_{z_2} \frac{1}{z_2 - z_3} \right)$$

A nouveau les parties méromorphes de ces expressions coïncident (pour la partie distribution c'est une autre histoire), mais il faut un peu les simplifier pour le voir. Finalement la partie méromorphe de la fonction à trois points est

$$\frac{1}{(z_1 - z_2)^2 (z_2 - z_3)^2 (z_3 - z_1)^2}$$

A la vue de ces exemples on conçoit que s'assurer directement que la fonctionnelle (1.8) est solution de (1.6) ne soit pas du tout facile, ceci étant dû au manque de localité qui rend obscures les intégrations par partie appropriées. L'étude de l'équation (1.6) et de ses solutions remonte au moins à [34]. Elle a depuis été entièrement réinterprétée avec soin pour lui donner une interprétation au sens des distributions (voir [28] et [29]).

1.5 L'action de Liouville

Jusqu'à présent, nous avons considéré le champ libre dans le plan euclidien (c'est à dire avec la métrique plate), et nous l'avons couplé avec des sources d'énergie-impulsion. Classiquement on sait bien qu'on peut considérer le tenseur énergie-impulsion comme la réponse du système à un changement de coordonnées, mais aussi comme l'opposé de la réponse à un changement de métrique dans une action rendue covariante. Intuitivement, partant de $S_0(\varphi)$ on passe à une action généralement covariante $S(g_{ab}, \varphi)$ qui coïncide avec S_0 quand $g_{ab} = \delta_{ab}$, alors dans un changement de coordonnées

$$\delta S = 0 = \delta S_{g_{ab}=c^{ste}} + \frac{\delta S}{\delta g_{ab}} \delta g_{ab}$$

on applique cette identité dans le cas $g_{ab} = \delta_{ab}$ pour obtenir

$$\delta S_0 = - \frac{\delta S}{\delta g_{ab}}(\delta_{ab}, \varphi) \delta g_{ab}$$

Nous allons établir un prolongement de ceci au cas quantique. Pour

$$S_0(\varphi) = \int \frac{d^2x}{8\pi} (\nabla \varphi)^2$$

on obtient

$$S(g_{ab}, \varphi) = \int \frac{d^2x}{8\pi} \sqrt{g} g^{ab} \partial_a \varphi \partial_b \varphi$$

et on cherche une action effective pour la métrique

$$S_{eff}(g_{ab}) = - \ln \int \mathcal{D}\varphi e^{-S(\varphi)}$$

On sait qu'à deux dimensions on peut par un changement de coordonnées se placer localement dans une métrique conforme où

$$g_{ab} = e^\rho \delta_{ab}$$

et si la topologie est celle du plan c'est même possible globalement. Si la topologie est plus compliquée il y a des obstructions pour interdisant un tel choix global, les métriques se répartissent alors en classes conformes de métriques qui dépendent de paramètres appelés modules; les métriques d'une classe diffèrent par une transformation de Weyl c'est à dire sont proportionnelles en chaque point. Dans ces coordonnées la dépendance en ρ disparaît (invariance de Weyl) et l'action se réduit à S_0 . Naïvement on pourrait donc penser que l'action effective est triviale.

Cependant il reste la possibilité d'une anomalie, soit dans les difféomorphismes (c'est l'approche de [28]) , soit dans les transformations de Weyl (voir par exemple [11]). Les deux interprétations sont possibles, nous choisirons la seconde: l'intégrale fonctionnelle doit être régularisée et les transformations de Weyl changent le facteur de coupure, donc risquent d'introduire des parties finies venant de divergences ultraviolettes qui étaient formellement nulles dans l'argument naïf. Comme les contretermes sont locaux on s'attend dans ce schéma à une action effective locale. Par définition d'une intégrale fonctionnelle quadratique on peut écrire

$$S_{eff}(g_{ab}) = \frac{1}{2} \ln Det\left(\frac{-\Delta}{4\pi}\right) = \frac{1}{2} Tr \ln\left(\frac{-\Delta}{4\pi}\right)$$

avec

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_a \sqrt{g} g^{ab} \partial_b$$

et nous choisissons la régularisation zeta pour le déterminant du Laplacien. Nous allons mener le calcul pour une surface compacte, mais le résultat final n'en gardera pas de trace. Dans le plan pour des métriques qui tendent vers la métrique euclidienne à l'infini on n'a pas à se préoccuper de modes zéro, qui sont dans un langage plus mathématique les éléments du noyau de l'opérateur, mais le spectre n'est pas discret; sur une surface compacte le spectre est discret mais le Laplacien a un noyau non trivial, les fonctions $\varphi = c^{ste}$. Pour éliminer ce mode zéro on insère dans l'intégrale fonctionnelle l'identité

$$\int dc \delta\left(\frac{1}{A} \int d^2x \sqrt{g} \varphi(x) - c\right) = 1$$

où A est l'aire, puis on translate φ de c ce qui laisse l'intégrale fonctionnelle invariante, enfin on divise par $\int dc$ ce qui donne une version mieux définie

$$\int \mathcal{D}\varphi e^{-S(\varphi)} \delta\left(\frac{1}{A} \int d^2x \sqrt{g} \varphi(x)\right)$$

ce qui signifie qu'on impose à φ d'avoir une valeur moyenne nulle. On décompose alors φ en une composante proportionnelle au mode zéro normalisé et une composante orthogonale (c'est à dire d'intégrale nulle)

$$\varphi = \frac{a}{\sqrt{A}} + \varphi'$$

(dans la suite de ce paragraphe le ' signifie qu'on restreint son attention à l'orthogonal des fonctions constantes) On intègre sur a pour obtenir

$$\sqrt{A} \int \mathcal{D}\varphi' e^{-S(\varphi')}$$

et on a donc

$$S_{eff} = -\frac{1}{2} \ln A + \frac{1}{2} Tr \ln\left(\frac{-\Delta'}{4\pi}\right)$$

Le principe de la régularisation zeta est le suivant: comme $-\Delta'$ est un opérateur strictement positif on peut en définir la puissance $-s$ et pour $Re(s)$ assez grand c'est un opérateur à trace. Si

$$\zeta(s) = (4\pi)^s Tr(-\Delta')^{-s} = \frac{(4\pi)^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} Tr e^{t\Delta'}$$

se prolonge analytiquement en zéro on obtient formellement

$$S_{eff} = -\frac{1}{2}(\ln A + \frac{d\zeta}{ds}(0))$$

Pour calculer $\zeta(s)$ on calcule sa variation dans une transformation de Weyl infinitésimale. Si $\delta g_{ab} = \rho g_{ab}$ on vérifie que $\delta\Delta = -\rho\Delta$. Comme la valeur propre nulle est toujours présente, on obtient

$$\delta Tr e^{t\Delta'} = -t Tr \rho \Delta e^{t\Delta} = -t \frac{d}{dt} Tr \rho e^{t\Delta}$$

donc

$$\delta\zeta(s) = -\frac{(4\pi)^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^s \frac{d}{dt} Tr \rho e^{t\Delta}$$

Ceci est a priori valable pour $Re(s)$ assez grand. Sinon les intégrales sont singulières à l'origine. Pour faire le prolongement analytique, il faut étudier le comportement de la trace à t petit. Pour cela on utilise la méthode suivante: la fonction

$$G(x, y, t) = \theta(t) \langle x | e^{t\Delta} | y \rangle$$

(θ est la fonction de Heaviside qui vaut 1 pour $t > 0$ et 0 pour $t < 0$) est la solution élémentaire de l'équation de la chaleur pour une source localisée en x

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \Delta_y G = \delta(t) \langle x | y \rangle$$

Par ailleurs multipliée par $\rho(x)$ elle donne les éléments de matrice de l'opérateur dont nous cherchons la trace. A x fixé $G(x, y, t)$ est une fonction scalaire de y . En prenant des coordonnées locales au voisinage de x avec $x^a = 0$ l'équation de la chaleur s'écrit

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - g^{ab}(y)(\partial_a \partial_b - \Gamma_{ab}^c(y) \partial_c) \right) G(y, t) = \delta(t) \frac{\delta(y)}{\sqrt{g(0)}}$$

Pour étudier ceci à temps court on utilise la famille de fonctions

$$G_\lambda(y, t) = G(\lambda y, \lambda^2 t) \lambda^d$$

où d est la dimension d'espace (dans la suite $d = 2$) et λ un paramètre strictement positif. Ces fonctions sont solution de

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - g^{ab}(\lambda y)(\partial_a \partial_b - \Gamma_{ab}^c(\lambda y) \partial_c) \right) G(y, t) = \delta(t) \frac{\delta(y)}{\sqrt{g(0)}}$$

Si on choisit des coordonnées telles que

$$g^{ab}(0) = \delta^{ab} \quad \Gamma_{ab}^c(0) = 0$$

(par exemple des coordonnées géodésiques) on constate que G_λ est solution de l'équation de la chaleur dans l'espace plat à des termes d'ordre λ^2 près, ce qui permet un développement systématique autour de

$$K(y, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp -\frac{\delta_{ab} y^a y^b}{4t}$$

par la convolution

$$G_\lambda = K - K * (D(\lambda)G_\lambda)$$

où $D(\lambda)$ est l'opérateur différentiel de perturbation. A deux dimensions tout se simplifie en choisissant localement des coordonnées conformes $g_{ab} = e^\rho \delta_{ab}$. Il est facile de se convaincre que dans une transformation holomorphe des coordonnées $\Delta\rho$ est invariant car Δ est un opérateur scalaire et on ajoute à ρ une fonction harmonique. C'est en fait l'opposé de la courbure scalaire R . On peut même supposer qu'à l'origine en plus des symboles de Christoffel les termes diagonaux de la matrice des dérivées secondes s'annulent. Alors au voisinage de l'origine

$$\rho(z, \bar{z}) = -\frac{R}{4}z\bar{z} + o(z\bar{z})$$

ce qui entraîne que

$$D(\lambda) = -\lambda^2 R z \bar{z} \partial \bar{\partial} + o(\lambda^2)$$

Si l'on s'intéresse uniquement au comportement à l'origine, la convolution se calcule très facilement à cet ordre et le résultat final est le suivant

$$G_\lambda(0, t) = \frac{1}{4\pi t} \left(1 + \frac{R}{6} t \lambda^2 + o(\lambda^2)\right)$$

soit encore

$$\langle x | e^{t\Delta} | x \rangle = G(0, t) = \frac{1}{4\pi t} \left(1 + \frac{Rt}{6} + o(t)\right)$$

On peut maintenant prolonger analytiquement

$$(1.10) \quad \int_0^\infty dt t^s \frac{d}{dt} \langle x | e^{t\Delta} | x \rangle$$

en décomposant l'intégrale en deux parties $\int_0^\infty = \int_0^\epsilon + \int_\epsilon^\infty$. La seconde est analytique en s , quant à la première elle est convergente pour $Re(s) > 1$ et se comporte en

$$-\frac{\epsilon^{s-1}}{4\pi(s-1)} + o(\epsilon^s)$$

pour ϵ tendant vers 0^+ . Donc la fonction définie pour $Re(s) \geq 0, s \neq 1$ par

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^\infty dt t^s \frac{d}{dt} \langle x | e^{t\Delta} | x \rangle - \frac{\epsilon^{s-1}}{4\pi(s-1)}$$

prolonge analytiquement (1.10). Faisant $s = 0$ on obtient en plus de la contribution à temps court une contribution à temps long due au mode zéro $|b\rangle$ (car $\exp t\Delta \rightarrow |b\rangle\langle b|$ pour t grand), soit finalement

$$\frac{1}{A} - \frac{R}{24\pi}$$

d'où l'on tire enfin $\delta\zeta'(0)$

$$(1.11) \quad \delta\zeta'(0) = \frac{1}{24\pi} \int d^2x \sqrt{g} \rho R - \frac{1}{A} \int d^2x \sqrt{g} \rho$$

On voudrait maintenant intégrer cette variation. Il est utile de connaître la variation de la courbure dans une transformation de Weyl. Partant d'une métrique arbitraire qu'on peut supposer conforme par un changement de coordonnées $g_{ab}^{(0)} \sim e^{\rho(0)} \delta_{ab}$ on remarque que

$$R(e^\rho g_{ab}^{(0)}) = R(e^{\rho(0)+\rho} \delta_{ab}) = -\Delta(\rho(0) + \rho) = e^{-\rho} (R_{(0)} - \Delta_{(0)}(\rho))$$

On utilise alors (1.11) avec $g_{ab} = e^{\theta\rho} g_{ab}^{(0)}$ avec $\theta \in [0, 1]$

$$\frac{d}{d\theta} \zeta'(0, e^{\theta\rho} g_{ab}^{(0)}) = \frac{1}{24\pi} \int d^2x \sqrt{g_{(0)}} e^{\theta\rho} \rho R(e^{\theta\rho} g_{ab}^{(0)}) - \frac{1}{A(e^{\theta\rho} g_{ab}^{(0)})} \int d^2x \sqrt{g_{(0)}} e^{\theta\rho} \rho$$

Ceci se réarrange pour donner

$$\frac{1}{24\pi} \int d^2x \sqrt{g_{(0)}} (\rho R_{(0)} - \rho \Delta_{(0)} \rho) - \frac{d}{d\theta} \ln A(e^{\theta\rho} g_{ab}^{(0)})$$

On intègre alors en θ de 0 à 1, et toutes les contributions des modes zéro se compensent dans S_{eff} pour laisser uniquement une action locale en ρ

$$S_{eff}(e^\rho g_{ab}^{(0)}) - S_{eff}(g_{ab}^{(0)}) = -\frac{1}{48\pi} \int d^2x \sqrt{g_{(0)}} (g_{(0)}^{ab} \partial_a \rho \partial_b \rho + R_{(0)} \rho)$$

Dans le plan et sur la sphère toutes les métriques sont conformément équivalentes à la métrique euclidienne. En genre un les classes conformes de métriques sont indexées par un paramètre complexe sur lequel nous reviendrons longuement plus tard (en genre plus élevé elles dépendent de $3g - 3$ paramètres, ce qui peut se démontrer par un théorème de l'index, en utilisant des développements à temps court pour des laplaciens agissant non pas sur les scalaires mais sur les vecteurs et les tenseurs symétriques de trace nulle; mais le résultat était en fait connu de Riemann avant tout théorème de l'index) La dépendance de S_{eff} dans ces paramètres est une question très difficile en général, mais en genre un l'invariance par translation sur le tore plat permet de calculer explicitement le spectre du laplacien, puis la dépendance dans le module τ .

On peut maintenant écrire un système complet d'équations déterminant S_{eff} en utilisant son invariance par changements de coordonnées. En effet celle ci entraîne que

$$S_{eff}(g_{ab} + D_a \epsilon_b + D_b \epsilon_a) = S_{eff}(g_{ab})$$

au premier ordre dans la 1-forme ϵ . Définissons alors les fonctionnelles de g_{ab} suivantes

$$T^{ab} = -\frac{2\pi}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_{eff}}{\delta g_{ab}}$$

En utilisant la métrique pour l'abaissement des indices on vérifie que

$$D_a T_b^a = \partial_a T_b^a + \Gamma_{ac}^a T_b^c - \Gamma_{ab}^c T_c^a = 0$$

D'autre part T^{ab} est symétrique donc

$$T_c^a g^{cb} = T_c^b g^{ca}$$

Enfin les résultats sur l'action de Liouville entraînent

$$T_a^a = \frac{1}{24} R$$

Cette famille d'équations va permettre de comparer l'approche métrique avec les résultats de la quatrième section.

1.6 De l'énergie-impulsion à la géométrie

Dans la section sur le tenseur énergie-impulsion nous avons calculé la fonctionnelle génératrice des corrélations connexes de T , sa partie holomorphe. Elle vérifiait

$$[\bar{\partial} + \pi(2\partial\mu + \mu\partial)]\frac{\delta W}{\delta\mu} = -\frac{\pi}{12}\partial^3\mu$$

On remarque tout de suite que l'action que l'on moyennait alors était tout simplement l'action pour le champ libre dans une métrique d'élément de longueur

$$ds^2 = dzd\bar{z} - \pi\mu d\bar{z}^2$$

Bien sûr cette métrique n'est déterminée par la forme de l'action qu'à un facteur conforme près. Il est cependant tentant de comparer avec les résultats de la section précédente. Pour ce ds^2 on obtient

$$T_z^z + T_{\bar{z}}^{\bar{z}} = -\frac{\pi}{6}\partial^2\mu \quad T_z^z = 2\pi\mu T_z^{\bar{z}} + T_{\bar{z}}^{\bar{z}}$$

et la loi de conservation suivante

$$\partial T_z^z + \bar{\partial} T_{\bar{z}}^{\bar{z}} + \pi\partial\mu T_z^{\bar{z}} = 0$$

C'est maintenant une simple élimination qui montre que $T_z^{\bar{z}}$ obéit à la même équation que $-W$ (Le signe est correct car la définition de S_{eff} implique une convention de signe opposé à celle de W).

Tout semble aller bien, mais si l'on cherche une fonctionnelle pour les corrélations de T et \bar{T} simultanément des problèmes apparaissent. En effet une forme naturelle pour le poids des configurations est

$$\int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{4i\pi} (\bar{\partial}\varphi\partial\varphi + \pi\mu(\partial\varphi)^2 + \pi\bar{\mu}(\bar{\partial}\varphi)^2)$$

Mais d'une part la fonctionnelle génératrice associée $W(\mu, \bar{\mu})$ doit être renormalisée (même pour notre version T_ϵ du tenseur énergie-impulsion) car elle contient des divergences de contact ; d'autre part il n'existe pas de métrique où cette expression puisse coïncider avec l'action du champ libre. De manière un peu surprenante ces deux problèmes sont liés. Commençons par le problème de renormalisation. En utilisant une version régularisée des fonctions $\langle \partial\varphi(z, \bar{z})\partial\varphi(z', \bar{z}') \rangle$, $\langle \bar{\partial}\varphi(z, \bar{z})\bar{\partial}\varphi(z', \bar{z}') \rangle$ et $\langle \partial\varphi(z, \bar{z})\bar{\partial}\varphi(z', \bar{z}') \rangle$ les fonctions de corrélation connexes de T et \bar{T} sont des sommes de diagrammes à une boucle avec ces fonctions comme propagateurs, et ces diagrammes divergent sauf s'il contiennent au moins deux lignes $\langle \partial\varphi(z, \bar{z})\partial\varphi(z', \bar{z}') \rangle$ ou $\langle \bar{\partial}\varphi(z, \bar{z})\bar{\partial}\varphi(z', \bar{z}') \rangle$. Par exemple

$$\langle T(z, \bar{z})\bar{T}(z', \bar{z}') \rangle_{reg} \propto \langle \partial\varphi(z, \bar{z})\bar{\partial}\varphi(z', \bar{z}') \rangle_{reg}^2$$

A deux dimensions toutes les divergences s'éliminent en choisissant une prescription de produit normal, c'est à dire en rajoutant à l'action des fonctions indépendantes du champ, ici des fonctions de μ et $\bar{\mu}$. Mais nous disposons dans notre cas d'une flexibilité plus grande pour les contre-terms car l'un des propagateurs ($\langle \partial\varphi(z, \bar{z})\bar{\partial}\varphi(z', \bar{z}') \rangle$) est purement local. On

constate par exemple qu'un contre-terme proportionnel à $\mu\bar{\mu}\bar{\partial}\varphi\partial\varphi$ rend la fonctionnelle finie à l'ordre $\mu\bar{\mu}$. On introduit donc une action plus générale

$$\int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{4i\pi} (\bar{\partial}\varphi\partial\varphi + \pi\alpha(\partial\varphi)^2 + 2\pi\beta(\bar{\partial}\varphi\partial\varphi) + \pi\gamma(\bar{\partial}\varphi)^2)$$

Formellement l'intégrale fonctionnelle associée vaut

$$\left[\exp -\frac{1}{2} \int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2i} (\alpha \frac{\delta^2}{\delta j^2} + 2\beta \frac{\delta^2}{\delta j \delta \bar{j}} + \gamma \frac{\delta^2}{\delta \bar{j}^2}) \right. \\ \left. < \exp \int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2i} (j\partial\varphi + \bar{j}\bar{\partial}\varphi) > \right]_{j=\bar{j}=0}$$

Nous allons utiliser des manipulations formelles des intégrales fonctionnelles quadratiques qui sont justifiées en dimension finie. Si M et $K = K_{(1)} + K_{(2)}$ sont des opérateurs agissant sur des vecteurs χ on sait que

$$\frac{\int \mathcal{D}\varphi \exp(-\frac{1}{2} \chi(K^{-1} + M)\chi)}{\int \mathcal{D}\varphi \exp(-\frac{1}{2} \chi K^{-1}\chi)} = \exp -\frac{1}{2} Tr \ln(1 + KM)$$

Dans cette écriture K joue le rôle de propagateur et M celui de vertex, mais on peut réarranger de la manière suivante

$$Tr \ln(1 + KM) = Tr \ln((1 + K_{(1)}M) + K_{(2)}M) \\ = Tr \ln(1 + K_{(2)}M(1 + K_{(1)}M)^{-1}) + Tr \ln(1 + K_{(1)}M)$$

Cette fois dans le premier terme le propagateur est $K_{(2)}$ et le vertex a été modifié alors que dans le second le propagateur est $K_{(1)}$ mais le vertex est resté M .

Dans le cas qui nous intéresse M est l'opérateur matriciel

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \otimes \delta^{(2)}(z - z')$$

alors que l'opérateur K vaut

$$= K_{(1)} + K_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \pi \delta^{(2)}(z - z') + \begin{pmatrix} -(z - z')^{-2} & 0 \\ 0 & -(\bar{z} - \bar{z}')^{-2} \end{pmatrix}$$

Comme $K_{(1)}$ est purement local, notre transformation a abouti à renormaliser les coefficients de M , qui reste un vertex local. Les nouveaux diagrammes associés sont tous convergents (sauf les fonctions à un point, qui sont des auto-contractions) car il n'y a plus de propagateur $< \partial\varphi(z, \bar{z})\bar{\partial}\varphi(z', \bar{z}') >$. Toutes les divergences ont été ramenées dans le terme où le vertex est resté M . Une manière économique de définir la théorie renormalisée est d'oublier ce terme, ce qui correspond dans une version régularisée à soustraire une quantité locale et indépendante du champ φ à l'action de départ. Mais on se souvient que α , β et γ ont été choisis pour que les fonctions de corrélation renormalisées soient celles de T et \bar{T} , sans contenir d'autres opérateurs.

Considérant les diagrammes qui contribuent aux fonctions de corrélation de T ou \bar{T} seuls ceci signifie que le vertex renormalisé doit être

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \bar{\mu} \end{pmatrix} \otimes \delta^{(2)}(z - z')$$

On a alors factorisation complète entre T et \bar{T} , et la fonctionnelle connexe est simplement la somme des fonctionnelles écrites précédemment. Cette factorisation des fonctions de corrélation de T et \bar{T} est une propriété générale des théories conformes, mais le champ libre est un des exemples où elle n'est pas tout à fait automatique. Le fait remarquable est que le vertex de départ vaut

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \pi^2 \mu \bar{\mu}} \begin{pmatrix} \mu & \pi \mu \bar{\mu} \\ \pi \mu \bar{\mu} & \bar{\mu} \end{pmatrix}$$

et que l'action complète avec ce vertex s'écrit sous la forme de l'action d'un champ libre dans une certaine classe conforme de métriques

$$\sqrt{g} g^{ab} = \frac{2}{i(1 - \pi^2 \mu \bar{\mu})} \begin{pmatrix} \pi \mu & \frac{1}{2}(1 + \pi^2 \mu \bar{\mu}) \\ \frac{1}{2}(1 + \pi^2 \mu \bar{\mu}) & \pi \bar{\mu} \end{pmatrix}$$

Ainsi partant d'une action sans caractère géométrique explicite et produisant des divergences lors de sa quantification, on obtient en renormalisant une action ayant un caractère géométrique clair, où il est naturel d'identifier μ et $\bar{\mu}$ comme des différentielles de Beltrami déformant la structure conforme ou comme des composantes d'une classe conforme de métriques. Il est maintenant naturel de penser que, pour un choix approprié de facteur conforme, l'action de Liouville associée n'est autre que $W(\mu) + W(\bar{\mu})$. Malheureusement nous n'avons pas réussi à déterminer ce facteur explicitement. Néanmoins cet exemple montre bien même au niveau quantique les rapports étroits mais un peu subtils entre le tenseur énergie-impulsion des changements de coordonnées et le tenseur énergie-impulsion du couplage à la gravitation.

1.7 Propriétés générales des théories conformes

Pour l'instant, nous avons développé un formalisme assez élémentaire mais qui a le mérite d'être très explicite. Cependant ce cadre est insuffisant pour développer toutes les applications. Le but de cette section est de généraliser l'exemple du champ libre que nous avons présenté. Il convient de rappeler que l'article fondamental [2] est toujours d'actualité et sa lecture pleine d'enseignements, même si certains points ont depuis été axiomatisés de façon plus complète (voir [31]). Tout d'abord il est clair que si le champ φ a n composantes, l'anomalie, c'est à dire le second membre de (1.6), est multipliée par n . D'autre part les calculs analogues menés pour un fermion à une composante donnent la même anomalie que pour un champ scalaire à un facteur $1/2$ près. Enfin un calcul simple montre que, pour le champ scalaire, si l'on rajoute à T un terme $\alpha_0 \partial^2 \varphi$ (une dérivée totale) les seuls changements sont un facteur multiplicatif $1 + 24\alpha_0^2$ donc largement arbitraire dans l'anomalie (génériquement on note c ce facteur multiplicatif de l'anomalie, normalisé à l'unité dans (1.6)) et l'apparition de nouveaux champs primaires à la place des anciens. On peut alors préciser un peu ce qu'on attend d'une théorie invariante

conforme à deux dimensions d'abord dans le plan: c'est une théorie locale des champs au point critique (donc invariante par translation, rotation, et dilatation) et de ce fait elle contient

- un champ de poids $(2, 0)$ T conservé (c'est à dire $\partial T = 0$ au sens de l'insertion dans les fonctions de corrélation hors points coïncidents)
- un champ de poids $(0, 2)$ \bar{T} conservé (c'est à dire $\bar{\partial} \bar{T} = 0$ au sens de l'insertion dans les fonctions de corrélation hors points coïncidents)
- des champs d'échelles particuliers, dits primaires, $\phi(z, \bar{z})$ caractérisés par leurs dimensions (h, \bar{h}) , et par le fait que leurs singularités à courte distance avec T et \bar{T} sont minimales

$$T(z, \bar{z})\phi(z', \bar{z}') = \frac{h}{(z - z')^2} \phi(z', \bar{z}') + \frac{1}{z - z'} \partial \phi(z', \bar{z}') + \text{partie régulière}$$

et l'analogie pour \bar{T} ;

- d'autres champs dits descendants, dont les produits à courte distance avec T ou \bar{T} sont plus singuliers (ce qui signifie que leurs lois de transformation contiennent des dérivées d'ordre plus élevé du changement de coordonnées, donc ne sont simples que pour les transformations conformes globales, dont les dérivées secondes s'annulent) et qui s'obtiennent comme coefficients de développements à courte distance itérés entre les champs primaires et T et \bar{T} (par exemple $\partial \phi$ est le résidu de $T\phi$ et son développement avec T commence par un pôle triple).

Quant à T et \bar{T} ce ne sont pas des champs primaires (on peut les voir comme des descendants du champ identité $\mathbf{1}$). Certes $T(z, \bar{z})\bar{T}(z', \bar{z}')$ n'a pas de singularités à points coïncidents, mais

$$T(z, \bar{z})\bar{T}(z', \bar{z}') = \frac{c}{2(z - z')^4} + \frac{2}{(z - z')^2} T\left(\frac{z + z'}{2}, \frac{\bar{z} + \bar{z}'}{2}\right) + \text{termes réguliers}$$

et une relation analogue pour \bar{T} où c , la charge centrale, est pour des raisons physiques la même pour les parties holomorphes et antiholomorphes. La variation de l'action dans les changements de coordonnées est

$$\delta S = \frac{1}{\pi} \int \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2i} (T\bar{\partial} f + \bar{T}\partial \bar{f})$$

Bien souvent il n'y a pas de modèle lagrangien au départ et cette équation est alors une définition de δS . A deux dimensions si l'on impose la décroissance à l'infini $\bar{\partial}$ a $1/\pi z$ comme solution élémentaire et les produits à courte distance donnent les parties singulières de la fonction méromorphe en z due à l'insertion de $T(z, \bar{z})$ donc déterminent entièrement cette fonction. Si l'on considère alors des sources μ pour T et λ^i pour des champs primaires ϕ_i on peut définir la fonctionnelle génératrice

$$Z(\mu, \lambda^i) = \langle \exp \int (\mu T + \lambda^i \phi_i) \rangle$$

qui doit être interprétée comme série formelle en μ et λ^i où il est sous entendu que les dérivations fonctionnelles sont prises à points distincts (sinon il y a bien sûr des singularités et de la renormalisation d'opérateurs composites). On vérifie alors que si Z obéit à l'équation fonctionnelle

(qui généralise celle que nous avons démontrée pour le champ libre)

$$\begin{aligned}
\frac{\delta Z}{\delta \mu(z, \bar{z})} &= -\frac{cZ}{12} \int \frac{1}{z-\xi} \partial_{\xi}^3 \mu(\xi, \bar{\xi}) - 2 \int \frac{1}{z-\xi} \partial_{\xi} \left(\frac{\delta Z}{\delta \mu(\xi, \bar{\xi})} \mu(\xi, \bar{\xi}) \right) \\
&+ \int \frac{1}{z-\xi} \partial_{\xi} \left(\frac{\delta Z}{\delta \mu(\xi, \bar{\xi})} \right) \mu(\xi, \bar{\xi}) \\
&+ \sum_i \left(-h_i \int \frac{1}{z-\xi} \partial_{\xi} \left(\frac{\delta Z}{\delta \lambda_i(\xi, \bar{\xi})} \lambda_i(\xi, \bar{\xi}) \right) \right) \\
(1.12) \quad &+ \int \frac{1}{z-\xi} \partial_{\xi} \left(\frac{\delta Z}{\delta \lambda_i(\xi, \bar{\xi})} \right) \lambda_i(\xi, \bar{\xi})
\end{aligned}$$

les fonctions de corrélation du tenseur énergie-impulsion ont le bon comportement à l'infini et à courte distance. Il est clair que chaque terme de cette équation fonctionnelle se lit directement sur les produits à courte distance. Le fait de faire porter les dérivations sur les termes de sources et non sur $1/(z-\xi)$ donne un sens en tant que distributions aux fonctions de corrélation.

Si l'on considère une surface orientable autre que le plan (si la théorie est vraiment locale on doit pouvoir l'y formuler), on peut imposer les conditions de produit à courte distance dans des cartes locales. La covariance de ces produits entraîne que les champs primaires sont des (h, \bar{h}) formes, c'est à dire que si z et ξ sont deux paramètres locaux on doit avoir

$$(1.13) \quad \phi(z, \bar{z}) \left(\frac{dz}{d\xi} \right)^h \left(\frac{\bar{d}z}{d\bar{\xi}} \right)^{\bar{h}} = \phi(\xi, \bar{\xi})$$

Pour le champ T c'est un peu plus compliqué mais en utilisant dans le terme en $c/2$ l'identité

$$(z(\xi) - z(\xi'))^2 = (\xi - \xi')^2 \frac{dz}{d\xi} \frac{dz}{d\xi'} \left(1 - \frac{(\xi - \xi')^2}{6} \{z, \xi\}_{\frac{\xi+\xi'}{2}} + O((\xi - \xi')^4) \right)$$

où la dérivée schwarzienne

$$\{z, \xi\} = \frac{d^3 z / d\xi^3}{dz/d\xi} - \frac{3}{2} \left(\frac{d^2 z / d\xi^2}{dz/d\xi} \right)^2$$

est évaluée en $\frac{\xi+\xi'}{2}$, on s'assure que la loi de transformation

$$T(z, \bar{z}) \left(\frac{dz}{d\xi} \right)^2 + \frac{c}{12} \{z, \xi\} = T(\xi, \bar{\xi})$$

préserve les produits à courte distance avec T dans les changements de cartes. Les formules de transformation des champs primaires montrent bien que, même s'il n'y a pas de version lagrangienne du modèle, un champ T ayant les singularités à courte distance prescrites est intimement relié aux transformations de coordonnées. Ces formules permettent d'étendre immédiatement une théorie définie sur le plan à des domaines de celui-ci obtenus par changement de coordonnées holomorphes, les conditions aux limites étant la régularité. Par exemple $z = e^{\ell}$ définit

une théorie conforme sur le cylindre des ρ . Notons que l'anomalie de T s'annule pour les transformations projectives qui sont les automorphismes complexes de la sphère de Riemann. En particulier pour $z = 1/\xi$ on a

$$T(z, \bar{z}) = T(\xi, \bar{\xi}) \frac{1}{z^4}$$

La régularité à l'infini c'est à dire en $\xi = 0$ signifie que l'insertion de T décroît comme une puissance quatrième, ce qui reporté dans (1.12) redonne l'invariance par translation, rotation, dilatation des fonctions de corrélation.

Chapter 2

Algèbres de courants

Le rôle des algèbres de courants en physique est reconnu depuis longtemps. La connexion (dont l'étude a commencé dans [55]) avec les théories conformes à été très fructueuse. Nous allons en rappeler les traits essentiels.

2.1 Introduction

Dans le chapitre 1 nous avons étudié quelques propriétés du champ libre. Nous nous sommes concentrés sur le tenseur énergie-impulsion, mais la théorie contenait un autre courant conservé, de poids $(1, 0)$: le champ $\partial\varphi$. Il avait un produit à courte distance

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial\varphi(z, \bar{z}) \partial\varphi(z', \bar{z}') = -\frac{1}{(z-\bar{z}')^2} + \text{termes réguliers} \\ \partial\varphi(z, \bar{z}) V_\alpha(z', \bar{z}') = -\frac{\alpha}{z-z'} V_\alpha(z', \bar{z}') + \text{termes réguliers} \end{array} \right.$$

et le tenseur énergie-impulsion était en quelque sorte le carré de $\partial\varphi$ régularisé. Il est intéressant de généraliser ces considérations.

Imaginons une théorie des champs avec une famille de courants conservés de poids conforme $(1, 0)$ notés J_a (on oublie une contrepartie antiholomorphe éventuelle). Alors la forme la plus générale de produit à courte distance est

$$J_a(z, \bar{z}) J_b(z, \bar{z}) = \frac{K_{ab}}{(z-z')^2} + \frac{O_{ab}}{z-z'}(z', \bar{z}') + \text{termes réguliers}$$

Le terme en $(z-z')^{-1}$ était absent dans le cas du champ libre. Mais O_{ab} sera lui aussi conservé de poids $(1, 0)$ au sens de l'insertion dans les fonctions de corrélations. Donc c'est une combinaison $F_{ab}^c J_c$ et on a

$$J_a(z, \bar{z}) J_b(z, \bar{z}) = \frac{K_{ab}}{(z-z')^2} + \frac{F_{ab}^c}{z-z'} J_c(z', \bar{z}') + \text{termes réguliers}$$

Par analogie avec le champ libre on introduit alors la notion de famille primaire ϕ_i pour les courants comme une famille de champs vérifiant

$$J_a(z, \bar{z})\phi_i(z', \bar{z}') = -\frac{R_{ai}{}^j}{z-z'}\phi_j(z', \bar{z}') + \dots$$

Du fait, entre autres, qu'il y a a priori plusieurs matrices $(R_a)_i^j$ indexées par a on ne peut pas forcément les diagonaliser simultanément.

Par des raisonnements analogues à ceux du chapitre 1, si Γ^a et λ^i sont des sources pour les J_a et ϕ_i et qu'on désigne par Z la quantité

$$\langle e^{\int \Gamma^a J_a + \lambda^i \phi_i} \rangle$$

on lit sur les développements à courte distance que

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{\delta Z}{\delta \Gamma^a(z, \bar{z})} &= -Z \int \frac{1}{z-\xi} K_{au} \partial_\xi \Gamma^u(\xi, \bar{\xi}) \\ &+ \int \frac{1}{z-\xi} \frac{\delta Z}{\delta \Gamma^v(\xi, \bar{\xi})} F_{au}{}^v \Gamma^u(\xi, \bar{\xi}) \\ &- \int \frac{1}{z-\xi} \frac{\delta Z}{\delta \lambda^q(\xi, \bar{\xi})} R_{ap}{}^q \lambda^p(\xi, \bar{\xi}) \end{aligned}$$

2.2 Contraintes sur les coefficients

L'équation fonctionnelle (2.1) a des conséquences très contraignantes sur la nature des coefficients K, F et R . Elle permet de calculer l'effet d'un nombre arbitraire d'insertions des courants dans les fonctions de corrélation.

Par exemple en dérivant (2.1) par rapport à $\Gamma^b(z', \bar{z}')$ on obtient.

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \frac{\delta^2 Z}{\delta \Gamma^a(z, \bar{z}) \delta \Gamma^b(z', \bar{z}')} &= -\frac{\delta Z}{\delta \Gamma^b(z', \bar{z}')} \int \frac{1}{z-\xi} K_{au} \partial_\xi \Gamma^u(\xi, \bar{\xi}) \\ &+ \int \frac{1}{z-\xi} \frac{\delta^2 Z}{\delta \Gamma^v(\xi, \bar{\xi}) \delta \Gamma^b(z, \bar{z})} F_{au}{}^v \Gamma^u(\xi, \bar{\xi}) \\ &- \int \frac{1}{z-\xi} \frac{\delta^2 Z}{\delta \lambda^q(\xi, \bar{\xi}) \delta \Gamma^b(z, \bar{z})} R_{ap}{}^q \lambda^p(\xi, \bar{\xi}) \\ &+ \frac{K_{ab}}{(z, z')^2} Z + \frac{F_{ab}{}^c}{z-z'} \frac{\delta Z}{\delta \Gamma^c(z', \bar{z}')} \end{aligned}$$

Si nous évaluons ceci pour des sources dont le support ne contient pas z et z' , on voit que la partie singulière lorsque $z \rightarrow z'$ de

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta \Gamma^a(z, \bar{z}) \delta \Gamma^b(z', \bar{z}')}$$

est simplement

$$\frac{K_{ab}}{(z-z')^2}Z + \frac{F_{ab}{}^c}{z-z'}\frac{\delta Z}{\delta\Gamma^c(z',\bar{z}')}$$

ce qui est une version du développement en produit d'opérateurs. La commutation des dérivations donne

$$(2.3) \quad (K_{ab} - K_{ba})Z = 0 \text{ et } (F_{ab}{}^c + F_{ba}{}^c)\frac{\delta Z}{\delta\Gamma^c(z,\bar{z})} = 0$$

De la même manière la partie singulière de

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta\Gamma^a(z,\bar{z})\delta\lambda^i(z',\bar{z}')}$$

quand $z \rightarrow z'$ est

$$\frac{R_{ai}{}^j}{z-z'}\frac{\delta Z}{\delta\lambda^j(z,z')}$$

Calculons encore en détails une autre contrainte, obtenue en dérivant (2.2) par rapport à $\lambda^i(z'',\bar{z}'')$ ce qui fournit

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \frac{\delta^3 Z}{\delta\Gamma^a(z,\bar{z})\delta\Gamma^b(z',\bar{z}')\delta\lambda^i(z'',\bar{z}'')} &= -\frac{\delta^2 Z}{\delta\Gamma^b(z',\bar{z}')\delta\lambda^i(z'',\bar{z}'')} \int \frac{1}{z-\xi} K_{au}\partial_\xi\Gamma^u(\xi,\bar{\xi}) \\ &+ \int \frac{1}{z-\xi} \frac{\delta^3 Z}{\delta\Gamma^v(\xi,\bar{\xi})\delta\Gamma^b(z',\bar{z}')\delta\lambda^i(z'',\bar{z}'')} F_{au}{}^v\Gamma^u(\xi,\bar{\xi}) \\ &+ \int \frac{1}{z-\xi} \frac{\delta^3 Z}{\delta\lambda^q(\xi,\bar{\xi})\delta\Gamma^b(z',\bar{z}')\delta\lambda^i(z'',\bar{z}'')} R_{ap}{}^q\lambda^p(\xi,\bar{\xi}) \\ &+ \frac{K_{ab}}{(z-z')^2} \frac{\delta Z}{\delta\lambda^i(z'',\bar{z}'')} + \frac{F_{ab}{}^c}{z-z'} \frac{\delta^2 Z}{\delta\lambda^i(z'',\bar{z}'')\delta\Gamma^c(z',\bar{z}')} \\ &- \frac{R_{ai}{}^q}{z-z''} \frac{\delta^2 Z}{\delta\lambda^q(z'',\bar{z}'')\delta\Gamma^b(z',\bar{z}')} \end{aligned}$$

Quand $z \rightarrow z''$ la partie singulière est

$$(2.5) \quad -\frac{1}{z-z''} R_{ai}{}^q \frac{\delta^2 Z}{\delta\lambda^q(z',\bar{z}')\delta\Gamma^b(z',\bar{z}')}$$

Mais quand $z' \rightarrow z''$ la partie singulière est

$$\begin{aligned} &\frac{R_{bi}{}^j}{z'-z''} \left[-\frac{\delta Z}{\delta\lambda^j(z'',\bar{z}'')} \int \frac{1}{z-\xi} K_{au}\partial_\xi\Gamma^u(\xi,\bar{\xi}) \right. \\ &\quad + \int \frac{1}{z-\xi} \frac{\delta^2 Z}{\delta\Gamma^v(\xi,\bar{\xi})\delta\lambda^j(z'',\bar{z}'')} F_{au}{}^v\Gamma^u(\xi,\bar{\xi}) \\ &\quad \left. + \int \frac{1}{z-\xi} \frac{\delta^2 Z}{\delta\lambda^q(\xi,\bar{\xi})\delta\lambda^j(z'',\bar{z}'')} R_{ap}{}^q\lambda^p(\xi,\bar{\xi}) \right] \\ &- \frac{R_{ci}{}^j}{z'-z''} \frac{F_{ab}{}^c}{z-z'} \frac{\delta Z}{\delta\lambda^j(z'',\bar{z}'')} - \frac{R_{bq}{}^j}{z'-z''} \frac{R_{ai}{}^q}{z'-z''} \frac{\delta Z}{\delta\lambda^j(z'',\bar{z}'')} \end{aligned}$$

Le terme entre crochets vaut simplement

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta \Gamma^a(z-z') \delta \lambda^j(z''-\bar{z}'')} + \frac{R_{aj}{}^q}{z-z''} \frac{\delta Z}{\delta \lambda^q(z''-\bar{z}'')}$$

Donc lorsque $z' \rightarrow z''$ la partie singulière est

$$(2.6) \quad -\frac{R_{bi}{}^q}{z'-z''} \frac{\delta^2 Z}{\delta \Gamma^a(z, \bar{z}) \delta \lambda^q(z'', \bar{z}'')} + \left(-\frac{R_{aq}{}^j R_{bi}{}^q}{(z-z'')(z-z'')} - \frac{F_{ab}{}^c R_{ci}{}^j}{(z'-z'')(z-z'')} + \frac{R_{bq}{}^j R_{ai}{}^q}{(z'-z'')(z-z'')} \right) \frac{\delta Z}{\delta \lambda^j(z'', \bar{z}'')}$$

Mais il doit y avoir une symétrie dans l'échange $(a, z) \leftrightarrow (b, z')$.

Comparant (2.5) et (2.6) on en déduit que :

$$\left(R_{ai}{}^q R_{bq}{}^j - R_{bi}{}^q R_{aq}{}^j - F_{ab}{}^c R_{ci}{}^j \right) \frac{\delta Z}{\delta \lambda^j(z'', \bar{z}'')} = 0$$

De la même manière en dérivant 2.2 par rapport à $\Gamma^c(z'', \bar{z}'')$ et en comparant les singularités à $z \rightarrow z''$ et à $z' \rightarrow z''$ on obtient une identité analogue

$$\left(F_{ac}{}^d F_{bd}{}^e - F_{bc}{}^d F_{ad}{}^e + F_{ab}{}^d F_{dc}{}^e \right) \frac{\delta Z}{\delta \Gamma^e(z'', \bar{z}'')} = 0$$

La valeur de la fonction à trois courants se calcule facilement, c'est

$$\frac{F_{ab}{}^d K_{dc}}{(z-z')(z'-z'')(z''-z)}$$

ce qui impose que $F_{ab}{}^d K_{dc}$ est totalement antisymétrique. Remarquons enfin que si les $\delta Z/\delta \Gamma^e$ vérifient une relation linéaire non triviale, la combinaison linéaire des J correspondante est nulle au sens de l'insertion dans les fonctions de corrélation (il n'y a même pas de termes de contact). Donc il est légitime de supposer l'absence de relations linéaires (algébriques) entre les $\delta Z/\delta \Gamma^e$ et les $\delta Z/\delta \lambda^j$.

Nous avons donc obtenu les résultats suivants. Les $F_{ab}{}^c$ sont antisymétriques en a, b et vérifient l'identité de Jacobi, ce sont donc les constantes de structure d'une algèbre de Lie; les matrices R_a en forment une représentation et K_{ab} définit une forme bilinéaire symétrique invariante sur cette algèbre. Ceci a la conséquence importante suivante: considérons la fonction de corrélation à un courant inséré au point z et deux champs primaires, fixés au point 0 et au point 1. D'après les identités de Ward (2.1) on a

$$\langle J_a(z, \bar{z}) \phi_i(0, 0) \phi_j(1, 1) \rangle = -\frac{R_{aj}{}^q}{z-1} M_{iq} - \frac{R_{ai}{}^q}{z} M_{qj}$$

où $M_{ij} = \langle \phi_i(0, 0) \phi_j(1, 1) \rangle$. En appliquant une transformation homographique laissant fixes les points 0 et 1 et en se souvenant que J_a est de dimension $(1, 0)$ on constate que le premier

membre décroît en $1/z^2$ à l'infini. Reportant ce comportement dans le second membre on obtient au sens matriciel

$$M^t R_a = R_a M \quad \text{pour tout } a$$

On se souvient que si l'on a une représentation matricielle R_a d'une algèbre de Lie sur un espace vectoriel, alors les matrices $-{}^t R_a$ fournissent une représentation sur le dual, et notre résultat dit simplement que la fonction à deux points est un entrelaceur de ces deux représentations. Si l'algèbre de Lie est réductive (en pratique une somme directe d'algèbres abéliennes et simples, c'est le cas qui nous intéressera plus loin) on peut décomposer la représentation R en composantes irréductibles. Notre résultat dit que la fonction à deux points entre des champs primaires s'annule sauf s'ils se transforment de manière duale l'un de l'autre. Ceci montre que dans la théorie les champs sont échangés de manière naturelle par une matrice C de carré 1 associant à un champ son conjugué.

2.3 Illustration : Les fermions couplés à un champ de jauge

Considérons (voir [36]) une famille de fermions à une composante (à deux dimensions ça existe!) ψ couplée à un champ de jauge associé à l'algèbre de Lie $so(n)$ sans terme cinétique. Les fonctions de corrélation pour la théorie effective du champ de jauge sont données par

$$Z(\Gamma) = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A e^{-\frac{1}{2} \int \psi_i (\delta_{ij} \partial + A_{ij}) \psi_j + \frac{1}{2} \int \Gamma_{ij} A_{ij}}$$

où A et Γ sont des matrices antisymétriques, Γ étant la source pour A .

Par translation sur A on obtient (dans ce paragraphe $\langle \dots \rangle$ désigne la valeur moyenne en présence du terme de source)

$$(2.7) \quad \langle \psi_i(z, \bar{z}) \psi_j(z, \bar{z}) \rangle = \Gamma_{ij}(z, \bar{z})$$

En fait cette expression nécessite une renormalisation. Si l'on écrit A comme une pure jauge $A = -(\partial h)h^{-1}$ où h est un champ de rotations déterminé à une "translation globale" à droite près, il est facile de calculer le propagateur des fermions en présence de A . C'est la solution élémentaire s'annulant à l'infini de $\partial + A$, c'est à dire $\frac{1}{\pi} \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}'} h(z, \bar{z}) h^{-1}(z', \bar{z}')$. Donc

$$\langle \psi_a(z, \bar{z}) \psi_b(z', \bar{z}') \rangle = \frac{1}{\pi (\bar{z} - \bar{z}')} \langle h(z, \bar{z}) h^{-1}(z', \bar{z}') \rangle$$

On renormalise (2.7) en séparant les points et en prenant le terme constant du développement à courte distance pour obtenir

$$\frac{1}{\pi} \langle (\bar{\partial} h) h^{-1} \rangle = \Gamma$$

On calcule ensuite

$$\partial \Gamma = \frac{1}{\pi} \langle \partial((\bar{\partial} h) h^{-1}) \rangle$$

Si l'on considère la valeur moyenne des deux membres de l'identité

$$\partial((\bar{\partial} h) h^{-1}) = \bar{\partial}((\partial h) h^{-1}) + [(\bar{\partial} h) h^{-1}, -(\partial h) h^{-1}]$$

(dans laquelle le crochet est celui de l'algèbre de Lie $so(n)$) on vérifie que malgré le produit d'opérateurs, grâce à l'antisymétrie il n'y a pas de singularités. On obtient alors

$$Z\delta\Gamma = -\frac{1}{\pi}\bar{\partial}\frac{\delta Z}{\delta\Gamma} + \left[\Gamma, \frac{\delta Z}{\delta\Gamma}\right]$$

soit en posant

$$J = \frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{\delta\Gamma}$$

$$\partial\Gamma + \frac{1}{\pi}\bar{\partial}J = [\Gamma, J]$$

En développant Γ sur une base des matrices antisymétriques on obtient exactement une identité fonctionnelle du type recherché.

On peut maintenant calculer la variation de l'action effective; à cet effet écrivons

$$Z = e^W \quad W + S = \frac{1}{2} \int J\Gamma$$

Alors

$$\delta S = \int Tr \left(\frac{\delta S}{\delta J} \delta J \right) = \int Tr \Gamma \delta J$$

On paramétrise $J = -(\partial h)h^{-1}$ et on pose $(\delta h)h^{-1} = \varepsilon$. Ainsi

$$\begin{aligned} \delta S &= \int Tr (\partial\Gamma + [J, \Gamma])\varepsilon \\ &= \frac{1}{\pi} \int Tr [\bar{\partial}((\partial h)h^{-1})\varepsilon] \\ (2.8) \quad &= \frac{1}{\pi} \int Tr [\partial(h^{-1}\bar{\partial}h)(h^{-1}\varepsilon h)] \end{aligned}$$

Ceci montre que la théorie contient naturellement deux courants conservés $-h^{-1}(\bar{\partial}h)$ et $-(\partial h)h^{-1}$ de poids respectifs $(0, 1)$ et $(1, 0)$.

En fait il n'y a pas d'action locale dont (2.8) soit la dérivée variationnelle (En termes d'un calcul extérieur fonctionnel (2.8) est fermée mais pas exacte). Cependant si $(\partial h)h^{-1}$ tend vers zéro à l'infini on peut compactifier le plan en une sphère S^2 , et considérer des extensions de l'application h à la boule B^3 dont cette sphère est le bord. Il existe alors (consulter par exemple [50]) une action fonction de ce champ étendu dont (2.8) est la dérivée variationnelle. C'est l'action de Wess-Zumino-Witten. Cette action se généralise immédiatement à des groupes de Lie compacts arbitraires.

A trois dimensions on considère $\mathcal{A} = (dh)h^{-1}$, la 1 forme de pure jauge associée au champ de rotation h . En coordonnées locales z, \bar{z}, t on écrit $\mathcal{A} = Adz + \bar{A}d\bar{z} + A_t dt$. On vérifie sans peine que

$$d\mathcal{A} = \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \delta\mathcal{A} = d\varepsilon + [\varepsilon, \mathcal{A}]$$

On en déduit aisément que

$$\delta Tr A\bar{A} = -Tr \varepsilon(\bar{\partial}A + \partial\bar{A})$$

et

$$\delta Tr \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = 3d(Tr \varepsilon d\mathcal{A} = 3d(Tr \varepsilon(\bar{\partial}A - \partial\bar{A})d\bar{z} \wedge dz)$$

d'où l'on conclut que

$$S_{WZW} = \frac{-1}{4i\pi} \int_{S^2} Tr A\bar{A}d\bar{z} \wedge dz + \frac{1}{12i\pi} \int_{B^3} Tr \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$$

a bien pour dérivée variationnelle (2.8). Dans le formalisme de l'intégrale fonctionnelle, l'ambiguïté dans l'action si l'on étend de deux manières différentes h de S^2 dans B^3 doit être un multiple entier de 2π . Les extensions du champ h sont classées par $\pi^3(G)$, troisième groupe d'homotopie. Ceci amène des contraintes sur la métrique K_{ab} apparaissant dans nos produits à courte distance. Ces mêmes contraintes se retrouvent par des considérations d'unitarité sur les représentations de l'algèbre de courants associée. Ceci est encore un domaine où algèbre, géométrie et topologie sont intimement liées. Notons enfin que le caractère topologique de l'action de Wess-Zumino-Witten est à l'origine d'importants travaux récents dans le cadre des théories des champs topologiques, des invariants de noeuds, des invariants topologiques des variétés tridimensionnelles, etc (voir par exemple [52, 53, 54]).

2.4 Le tenseur énergie-impulsion

Dans le cas du champ libre le tenseur énergie-impulsion était une version renormalisée du carré du courant. On va voir que cette idée se généralise à des algèbres de Lie plus compliquées. Ceci est en fait une version dans le cadre du formalisme fonctionnel de la construction due à Sugawara([46]).

Supposons que les constantes de structure F_{ab}^c définissent une algèbre réductive (c'est à dire une somme directe d'algèbres abéliennes et simples, condition à laquelle une forme réelle de l'algèbre est associée à un groupe compact). Il y a alors un découplage des facteurs de la somme directe ; le cas abélien est une généralisation immédiate du champ libre, c'est pourquoi nous supposons l'algèbre simple. Il est commode de choisir une fois pour toutes des normalisations pour les constantes de structure : par un changement de base on peut les choisir imaginaires pures, avec ces conventions la forme de Killing est définie positive et on peut supposer sa matrice proportionnelle à l'identité : $F_{ab}^c F_{dc}^b \simeq \delta_{ad}$. Alors il en est de même pour K_{ab} (par unicité de la forme invariante). On a donc

$$F_{ab}^c F_{dc}^b = \lambda \delta_{ad} \quad K_{ad} = K \delta_{ad}$$

Pour exprimer de manière commode les contraintes sur K_{ab} que nous mentionnions au paragraphe précédent il existe une normalisation géométrique agréable de λ , que nous expliciterons dans le cas de $su(N)$. Fixer λ donne la normalisation non seulement de K mais également des opérateurs de Casimir de l'algèbre de Lie, et nous vérifierons que les formules finales pour les poids conformes et la charge centrale sont homogènes de degré zéro dans ces grandeurs.

La dérivation de l'identité fonctionnelle de Ward (2.1) par rapport à $\Gamma^u(z', \bar{z}')$ et $\Gamma^v(z'', \bar{z}'')$ donne

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^3 Z}{\delta\Gamma^a(z, \bar{z})\delta\Gamma^u(z', \bar{z}')\delta\Gamma^v(z'', \bar{z}'')} &= -\frac{\delta^2 Z}{\delta\Gamma^u(z', \bar{z}')\delta\Gamma^v(z'', \bar{z}'')} \int \frac{K}{z-\xi} \partial_\xi \Gamma_a(\xi, \bar{\xi}) \\
&+ \int \frac{1}{z-\xi} \frac{\delta^3 Z}{\delta\Gamma^c(\xi, \bar{\xi})\delta\Gamma^u(z', \bar{z}')\delta\Gamma^v(z'', \bar{z}'')} F_{ab}{}^c \Gamma^b(\xi, \bar{\xi}) \\
&+ \frac{K\delta_{av}}{(z-z'')^2} \frac{\delta Z}{\delta\Gamma^u(z', \bar{z}')} + \frac{F_{av}{}^c}{(z-z'')} \frac{\delta^2 Z}{\delta\Gamma^u(z, \bar{z}')\delta\Gamma^c(z'', \bar{z}'')} \\
(2.9) \quad &+ \frac{K\delta_{au}}{(z-z')^2} \frac{\delta Z}{\delta\Gamma^v(z'', \bar{z}'')} + \frac{F_{au}{}^c}{(z-z')} \frac{\delta^2 Z}{\delta\Gamma^v(z'', \bar{z}'')\delta\Gamma^c(z', \bar{z}')}
\end{aligned}$$

On définit alors $\tilde{Z}_{uv}(z', \bar{z}')$, symétrique dans les indices $u v$ par

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{d\tau}{\tau} \frac{\delta^2 Z}{\delta\Gamma^u(z'+\tau, \bar{z}'+\bar{\tau})\delta\Gamma^v(z'-\tau, \bar{z}'-\bar{\tau})}$$

Cette limite existe à condition de l'évaluer pour une source Γ dont le support ne rencontre pas z' . Il est à noter que

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta^2 Z}{\delta\Gamma^u(z'+\tau, \bar{z}'+\bar{\tau})\delta\Gamma^v(z'-\tau, \bar{z}'-\bar{\tau})} = \\
&\frac{K\delta_{uv}}{4\tau^2} + \frac{F_{uv}{}^w}{2\tau} \frac{\delta Z}{\delta\Gamma^w(z', \bar{z}')} + \tilde{Z}_{uv}(z', \bar{z}') + \text{termes réguliers}
\end{aligned}$$

ce qui permet de calculer l'intégrale sur τ appliquée aux deux membres de (2.9) à la limite où $\varepsilon \rightarrow 0$ (en fait pour des raisons d'holomorphie le résultat est indépendant de ε s'il est assez petit).

Si l'on note \tilde{Z}_1 la trace de \tilde{Z}_{uv} on obtient pour \tilde{Z}_1

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \tilde{Z}_1(z', \bar{z}')}{\delta\Gamma^a(z, \bar{z})} &= -\tilde{Z}_1(z', \bar{z}') \int \frac{K}{z-\xi} \partial_\xi \Gamma_a(\xi, \bar{\xi}) \\
&+ \int \frac{K}{z-\xi} \frac{\delta \tilde{Z}_1(z', \bar{z}')}{\delta\Gamma^c(\xi, \bar{\xi})} F_{ab}{}^c \Gamma^b(\xi, \bar{\xi}) \\
&+ \frac{2K+\lambda}{(z-z')^2} \frac{\delta Z}{\delta\Gamma^a(z', \bar{z}')}
\end{aligned}$$

On définit alors $Z_1 = \frac{1}{2K+\lambda} \tilde{Z}_1$, et la partie singulière de $\delta Z_1(z', \bar{z}')/\delta\Gamma^a(z, \bar{z})$ est celle de

$$\frac{1}{(z-z')^2} \frac{\delta Z}{\delta\Gamma^a(z', \bar{z}')}$$

c'est à dire

$$\frac{1}{(z-z')^2} \frac{\delta Z}{\delta\Gamma^a(z, \bar{z})} + \frac{1}{z-z'} \partial \frac{\delta Z}{\delta\Gamma^a(z, \bar{z})}$$

donc quand $z \rightarrow z'$ on a

$$\frac{\delta Z_1(z', \bar{z}')}{\delta \Gamma^a(z, \bar{z})} = \frac{1}{(z - z')^2} \frac{\delta Z}{\delta \Gamma^a(z, \bar{z})} + \frac{1}{z - z'} \partial \frac{\delta Z}{\delta \Gamma^a(z, \bar{z})} + \text{termes réguliers}$$

Si l'on dérive l'équation pour $\delta Z_1(z, \bar{z})/\delta \Gamma^a(z', \bar{z}')$ cette fois par rapport à $\Gamma^a(z'', \bar{z}'')$ on peut obtenir une équation pour

$$\frac{1}{2K + \lambda} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_u \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{d\tau}{\tau} \frac{\delta^2 Z_1(z, \bar{z})}{\delta \Gamma^a(z' + \tau, \bar{z}' + \bar{\tau}) \delta \Gamma^a(z' - \tau, \bar{z}' - \bar{\tau})}$$

qu'on note $Z_2(z, \bar{z}; z', \bar{z}')$, dont on remarque la symétrie dans ses deux arguments. On obtient

$$\begin{aligned} (2K + \lambda) Z_2(z, \bar{z}; z', \bar{z}') &= -\frac{\delta Z_1(z, \bar{z})}{\delta \Gamma^a(z', \bar{z}')} \int \frac{K}{z' - \xi} \partial_\xi \Gamma^a(\xi, \bar{\xi}) \\ &+ \int \frac{1}{z' - \xi} \frac{\delta^2 Z_1(z, \bar{z})}{\delta \Gamma^c(\xi, \bar{\xi}) \delta \Gamma_a(z', \bar{z}')} F_{ab}{}^c \Gamma^b(\xi, \bar{\xi}) \\ &+ \frac{1}{(z - z')^2} \frac{\delta^2 Z}{\delta \Gamma^a(z, \bar{z}) \delta \Gamma_a(z', \bar{z}')} \end{aligned}$$

(2.10)

Comme dans l'exemple détaillé du deuxième paragraphe on insère la singularité de $\delta Z_1(z, \bar{z})/\delta \Gamma^a(z', \bar{z}')$ (c'est à dire $(z - z')^{-1} \delta Z/\delta \Gamma^a(z, \bar{z})$) dans les intégrales, on utilise l'équation fonctionnelle pour Z et on obtient pour la partie singulière de $Z_2(z, \bar{z}; z', \bar{z}')$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2K \dim \mathcal{G}}{2K + \lambda} \right) \frac{1}{(z - z')^4} + \frac{2}{(z - z')^2} Z_1 \left(\frac{z + z'}{2}, \frac{\bar{z} + \bar{z}'}{2} \right)$$

Ceci suffit pour conclure que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2K + \lambda} \sum_a \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{d\tau}{\tau} J_a(z + \tau, \bar{z} + \bar{\tau}) J_a(z - \tau, \bar{z} - \bar{\tau})$$

définit un tenseur énergie-impulsion $T(z, \bar{z})$ pour lequel le poids h des courants est 1 et la charge centrale est

$$c = \frac{2K \dim \mathcal{G}}{2K + \lambda}$$

Enfin en appliquant la même méthode dans l'équation (2.4) on vérifie rapidement (en supposant la représentation de \mathcal{G} portée par les ϕ réduite en ses composantes irréductibles) que ϕ_i est un champ primaire pour T de poids conforme

$$h_i = \frac{C_R}{2K + \lambda} \text{ où } \sum_a R_{ai}{}^j R_{aj}{}^\ell = C_R \delta_i{}^\ell$$

est la valeur propre de l'opérateur de Casimir de la représentation. Comme nous l'avions annoncé, ces valeurs sont indépendantes de la normalisation de λ .

Chapter 3

Formalisme opératoire

3.1 Quantification radiale

Il est intéressant de passer d'un formalisme de mécanique statistique ou lagrangien à un formalisme opératoire de théorie des champs ([2]). Transformons le plan de la variable z privé de l'origine en un cylindre $z = e^\rho$ $\rho = \tau + i\sigma$. Les conditions aux limites sont la régularité à $\tau \rightarrow \pm\infty$. Nous utilisons τ comme variable d'évolution. On peut alors associer à chaque fonction de corrélation une valeur moyenne dans le vide d'un produit ordonné en temps. Le symbole R impliquant d'ordonner les opérateurs par temps croissants de la droite vers la gauche on a la correspondance suivante

$$\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle \stackrel{def}{=} \langle 0 | R(\hat{\phi}_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \hat{\phi}_n(z_n, \bar{z}_n)) | 0 \rangle$$

Pour calculer le commutateur de deux opérateurs à temps égaux, on utilise si $|z| = |z'|$

$$\left[\hat{\phi}(z, \bar{z}), \hat{\phi}'(z', \bar{z}') \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} R(\{\hat{\phi}(e^\varepsilon z, e^\varepsilon \bar{z}) \hat{\phi}'(z', \bar{z}')\} - \{\varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon\})$$

Ainsi les commutateurs à temps égaux s'interprètent comme des valeurs au bord de fonctions de corrélation, associés aux singularités des produits à courte distance. A deux dimensions la situation est particulièrement agréable si l'insertion d'un des deux opérateurs, disons $\phi(z, \bar{z})$ a des propriétés d'holomorphic, comme c'était le cas pour le tenseur énergie-impulsion (2,0) ou les courants (1,0) des chapitres précédents : on peut alors à temps donné développer en série de Fourier sur le cercle, et les commutateurs des modes avec $\hat{\phi}'(z', \bar{z}')$ sont donnés par des limites d'intégrales de contour, que l'holomorphic permet de déformer librement. Il faut juste éviter de rencontrer d'autres insertions que celle de ϕ' .

Par exemple dans le cas des courants si $Z = \langle \exp \int \Gamma^a J_a + \lambda^i \phi_i \rangle$ écrivons pour $|z| = e^\tau$

$$\hat{J}_a(z, \bar{z}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{J}_a^{(n)}(\tau) z^{-n-1}$$

La fonctionnelle associée à l'insertion de $\hat{J}_a^{(n)}(\tau)$ est

$$e^{(n+1)\tau} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\delta Z}{\delta \Gamma^a(e^{\tau+i\sigma}, e^{\tau-i\sigma})} e^{i(n+1)\sigma} d\sigma$$

et on remarque que ceci s'écrit encore

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=e^\tau} \frac{\delta Z}{\delta \Gamma^a(z, \bar{z})} z^{n+1} \frac{dz}{z}$$

Soit maintenant S une partie du plan privé de l'origine dont le bord ∂S est suffisamment régulier, l'équation (2.1) se réécrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial S} \frac{\delta Z}{\delta \Gamma^a(z, \bar{z})} z^{n+1} \frac{dz}{z} &= -Z \int_S \xi^n K_{au} \partial_\xi \Gamma^u(\xi, \bar{\xi}) \\ &+ \int_S \xi^n \frac{\delta Z}{\delta \Gamma^v(\xi, \bar{\xi})} F_{au}{}^v \Gamma^u(\xi, \bar{\xi}) \\ &- \int_S \xi^n \frac{\delta Z}{\delta \lambda^q} R_{ap}{}^q \lambda^p(\xi, \bar{\xi}) \end{aligned}$$

(3.1)

On peut alors dériver fonctionnellement par rapport à $\Gamma^b(z', \bar{z}')$ où (z', \bar{z}') est dans S et ensuite évaluer pour des sources nulles dans S ce qui donne

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial S} \frac{\delta^2 Z}{\delta \Gamma^a(z, \bar{z}) \delta \Gamma^b(z', \bar{z}')} z^{n+1} \frac{dz}{z} = n Z z'^{n-1} K_{ab} + z^n \frac{\delta Z}{\delta \Gamma^v(z', \bar{z}')} F_{ab}{}^v$$

Ceci montre, en prenant pour S la couronne $e^{\tau-\varepsilon} < |z| < e^{\tau+\varepsilon}$, que si $|z'| = e^\tau$

$$\left[\hat{J}_a^{(n)}(\tau), \hat{J}_b(z', \bar{z}') \right] = n z'^{n-1} K_{ab} + z'^n F_{ab}{}^c \hat{J}_c(z', \bar{z}')$$

en appliquant des deux côtés $\frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=e^\tau} z'^{m+1} \frac{dz}{z}$ il vient

$$\left[\hat{J}_a^{(n)}(\tau), \hat{J}_b^{(m)}(\tau) \right] = n \delta_{n+m} K_{ab} + F_{ab}{}^c \hat{J}_c^{m+n}(\tau)$$

De la même manière on obtient pour $|z'| = e^\tau$

$$\left[\hat{J}_a^{(n)}(\tau), \hat{\phi}_i(z', \bar{z}') \right] = -z'^n R_{ai}{}^j \hat{\phi}_j(z', \bar{z}')$$

On peut appliquer ceci à la fonctionnelle génératrice des corrélations de T , en définissant $\hat{L}^{(n)}(\tau)$ par

$$\hat{T}(z, \bar{z}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{L}_n(\tau) z^{-n-2}$$

Alors la fonctionnelle associée à l'insertion de $\hat{L}_n(\tau)$ est (si $Z = \langle \exp \int \mu T + \lambda^i \phi_i \rangle$ où les ϕ_i sont ici les opérateurs primaires de T)

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=e^\tau} \frac{\delta Z}{\delta \mu(z, \bar{z})} z^{n+2} \frac{dz}{z}$$

et l'on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial S} \frac{\delta Z}{\delta \mu(z, \bar{z})} z^{n+2} \frac{dz}{z} &= -\frac{cZ}{12} \int_S \xi^{n+1} \partial_\xi^3 \mu(\xi, \bar{\xi}) \\ &- 2 \int_S \xi^{n+1} \partial_\xi \left(\frac{\delta Z}{\delta \mu(\xi, \bar{\xi})} \mu(\xi, \bar{\xi}) \right) + \int_S \xi^{n+1} \partial_\xi \left(\frac{\delta Z}{\delta \mu(\xi, \bar{\xi})} \right) \mu(\xi, \bar{\xi}) \\ &+ \sum_i -h_i \int_S \xi^{n+1} \partial_\xi \left(\frac{\delta Z}{\delta \lambda^i(\xi, \bar{\xi})} \lambda^i(\xi, \bar{\xi}) \right) + \int_S \xi^{n+1} \partial_\xi \left(\frac{\delta Z}{\delta \lambda^i(\xi, \bar{\xi})} \right) \lambda^i(\xi, \bar{\xi}) \end{aligned}$$

Si on dérive par rapport à $\mu(z', \bar{z}')$ où (z', \bar{z}') est dans S et qu'on évalue pour des sources nulles dans S on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial S} \frac{\delta^2 Z}{\delta \mu(z, \bar{z}) \delta \mu(z', \bar{z}')} z^{n+2} \frac{dz}{z} &= \frac{cZ}{12} (n^3 - n) z'^{n-2} + 2(n+1) z'^n \frac{\delta Z}{\delta \mu(z', \bar{z}')} \\ &+ z'^{n+1} \partial_{z'} \frac{\delta Z}{\delta \mu(z', \bar{z}')} \end{aligned}$$

ce qui entraîne que, si $|z'| = e^\tau$

$$\left[\hat{L}_n(\tau), T(z', \bar{z}') \right] = \frac{c}{12} (n^3 - n) z'^{n-2} + 2(n+1) z'^n T(z', \bar{z}') + z'^{n+1} \partial_{z'} T(z', \bar{z}')$$

et par intégration sur le cercle $|z'| = e^\tau$ on a

$$\left[\hat{L}_n(\tau), \hat{L}_m(\tau) \right] = \frac{c}{12} (n^3 - n) \delta_{n+m} + (n-m) \hat{L}_{n+m}(\tau)$$

ce qui est l'algèbre de Virasoro, notée Vir, avec bien sûr des résultats semblables pour la partie \bar{T} .

De la même manière

$$\left[\hat{L}_n(\tau), \phi_i(z', \bar{z}') \right] = (n+1) h_i z'^n \phi_i(z', \bar{z}') + z'^{n+1} \partial_{z'} \phi_i(z', \bar{z}')$$

Pour obtenir le Hamiltonien, il faut d'abord identifier parmi les opérateurs ceux qui n'ont pas de dépendance explicite en temps.

D'une manière générale, si les ψ_i sont des opérateurs (pas forcément primaires) de dimensions (h_i, \bar{h}_i) on sait que dans une dilatation $z \rightarrow \alpha z$ la fonction de corrélation $\langle \psi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \psi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle$ est multipliée par $\alpha^{-\Sigma h_i} \bar{\alpha}^{-\Sigma \bar{h}_i}$, ce qui montre que les fonctions de corrélations des champs $z^h \bar{z}^{\bar{h}} \psi_i(z, \bar{z})$ sont invariantes pour les dilatations, donc les valeurs moyennes d'opérateurs associés sont invariantes dans les translations en τ . Comme $z = e^\ell$

définir $\hat{\psi}_i(\varrho, \bar{\varrho}) = z^h \bar{z}^{\bar{h}} \hat{\psi}_i(z, \bar{z})$ est compatible avec le fait que dans un changement de carte un champs primaire ϕ_i se comporte comme une (h, \bar{h}) forme ($\phi_i(\xi, \bar{\xi}) = \phi_i(z, \bar{z}) \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^h \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{\xi}}\right)^{\bar{h}}$) pour préserver la structure des produits à courte distance.

On observe alors que

$$(3.2) \quad \left[\hat{L}_n(\tau), \phi_i(\varrho, \bar{\varrho}) \right] = \left(z^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + hn z^n \right) \hat{\phi}_i(\varrho, \bar{\varrho})$$

Mais $\frac{\partial}{\partial \tau} = z \frac{\partial}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ et $\frac{\partial}{\partial \sigma} = i \left(z \frac{\partial}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$. On obtient donc que

$$\left[\hat{L}_0(\tau) + \hat{\bar{L}}_0(\tau), \hat{\phi}_i(\varrho, \bar{\varrho}) \right] = \frac{\partial}{\partial \tau} \hat{\phi}_i(\varrho, \bar{\varrho})$$

et

$$\left[\hat{L}_0(\tau) - \hat{\bar{L}}_0(\tau), \hat{\phi}_i(\varrho, \bar{\varrho}) \right] = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \sigma} \hat{\phi}_i(\varrho, \bar{\varrho})$$

Ceci permet d'identifier à une constante près le Hamiltonien comme $L_0 + \bar{L}_0$ et l'impulsion comme $L_0 - \bar{L}_0$. Mais on a vu que

$$\begin{aligned} T(\varrho, \bar{\varrho}) &= T(z, \bar{z}) \left(\frac{dz}{d\varrho} \right)^2 + \frac{c}{12} \{z, \varrho\} \\ &= T(z, \bar{z}) z^2 + \frac{c}{12} \left(-\frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Il est alors naturel (ceci revient à fixer les phases absolues des états dans l'espace de Hilbert) de prendre comme Hamiltonien $\hat{L}_0 + \hat{\bar{L}}_0 - \frac{c}{12}$ qui est bien sûr par définition indépendant de τ .

Nous avons défini les opérateurs $\hat{L}_n(\tau)$ agissant sur l'espace de Hilbert de la théorie avant d'avoir choisi un Hamiltonien. On peut vérifier que ces opérateurs sont indépendants de τ , et ce sont donc des opérateurs dans la représentation de Schrödinger, ils ne commutent pas avec l'opérateur d'évolution pour la partie holomorphe \hat{L}_0 .

On peut alors écrire

$$\hat{T}(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{L}_n z^{-n-2}$$

On sait que si $z \rightarrow 0$ et qu'il n'y a pas d'autre opérateur à l'origine les fonctions de corrélation avec insertion de $\hat{T}(z)$ ne doivent pas être singulières. Ceci impose $\hat{L}_n |0\rangle = 0 \quad n \geq -1$. Plus généralement, si en zéro se trouve le champ primaire $\hat{\phi}_i(0, 0)$, la singularité est en

$$h_i \frac{\phi_i(0, 0)}{z^2} + \frac{1}{z} \partial \phi_i(0, 0)$$

d'où l'on déduit

$$\hat{L}_0 \hat{\phi}_i(0, 0) |0\rangle = h_i \hat{\phi}_i(0, 0) |0\rangle$$

$$\hat{L}_n \hat{\phi}_i(0, 0) |0\rangle = 0 \quad n \geq 1$$

Si la théorie contient une algèbre de courants on a:

$$\left[\hat{L}_m, \hat{J}_a(z, \bar{z}) \right] = (m+1)z^m \hat{J}_a(z, \bar{z}) + z^{m+1} \partial_z \hat{J}_a(z, \bar{z})$$

d'où

$$\left[\hat{L}_m, \hat{J}_a^{(n)}(\tau) \right] = -n \hat{J}_a^{(n+m)}(\tau)$$

qu'on peut utiliser pour montrer que les $\hat{J}_a^{(n)}$ ne dépendent en fait pas de τ .

En appliquant les mêmes arguments de régularité à l'origine on obtient

$$\hat{J}_a^{(n)} |0\rangle = 0 \quad n \geq 0 \quad \text{et si les } \phi_i \text{ sont une famille primaire de } J$$

$$\hat{J}_a^0 \phi_i(0,0) |0\rangle = -R_{ai}^j \hat{\phi}_j(0,0) |0\rangle$$

$$\hat{J}_a^0 \phi_i(0,0) |0\rangle = 0 \quad n \geq 1$$

On remarque sur ces exemples que les représentations d'algèbres associées aux théories conformes ont une structure dite de plus haut poids par analogie avec la terminologie usuelle des algèbres de Lie de dimension finie.

3.2 Quelques résultats de la théorie des représentations

Nous ne pouvons donner ici qu'un bref aperçu de ce sujet très vaste. On trouve dans [23] une présentation pédagogique très agréable.

3.2.1 Cas de l'algèbre de Virasoro.

Nous supposons c et h réels. Une notion importante est celle de module de Verma de plus haut poids : dans $\mathcal{U}(\text{Vir})$ l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Virasoro on considère l'idéal à gauche engendré par $L_0 - h$, et les L_n $n \geq 1$. Le quotient se note $V(c, h)$ et il est universel au sens suivant : tout module cyclique (c'est à dire engendré par l'action sur un seul vecteur) de plus haut poids h pour Virasoro est un quotient de $V(c, h)$. C'est l'étude des inclusions de modules de Verma (les plus courageux iront consulter [14]) qui est à la base de la théorie des représentations irréductibles. On vérifie aisément que si $|h\rangle$ désigne le vecteur tel que $L_0|h\rangle = h|h\rangle$ et $L_n|h\rangle = 0$ $n \geq 1$ ($|h\rangle$ est en fait la classe de 1 dans $V(c, h)$ c'est à dire l'unité dans $\mathcal{U}(\text{Vir})$ modulo l'idéal à gauche engendré par $L_0 - h$, et les L_n alors les vecteurs $L_{-n_1} \cdots L_{-n_k} |h\rangle$ où $n_1 \geq n_2 \cdots n_k \geq 1$, $n_1 + \cdots + n_k = n$ forment une base du sous-espace $V_n(c, h)$ de $V(c, h)$ de valeur propre $n + h$ pour L_0 . A toute suite finie $n_1 \geq n_2 \cdots \geq n_k \geq 1$ on peut associer la suite infinie avec $n_i = 0$ $i > k$ et réciproquement à toute suite décroissante nulle à partir d'un certain rang on peut associer la suite finie tronquée. Alors

$$\sum_{i=1}^k n_i = \sum_{i=1}^{\infty} n_i = \sum_{i=1}^{\infty} i(n_i - n_{i+1})$$

et posant $n_k - n_{k+1} = m_k$ on obtient pour la fonction génératrice des $\dim V_n(c, h)$ appelée caractère

$$\chi_{c,h}^V(q) = q^{h-\frac{c}{24}} \sum_{n=0}^{\infty} \dim V_n(c, h) q^n$$

(le préfacteur est conventionnel et le symbole V rapelle Verma)

$$\chi_{c,h}^V(q) = q^{h-\frac{c}{24}} \sum_{(m_k)_{\text{presque nulle}}} q^{\sum k m_k} = \frac{q^{h-\frac{c}{24}}}{\prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)}$$

Le fait que l'algèbre de Virasoro soit graduée et que à une translation par le poids conforme près L_0 calcule cette graduation a la conséquence très simple suivante :

si E est un sous-espace vectoriel de $V(c, h)$ stable par L_0 alors $E = \bigoplus_n (V_n(c, h) \cap E)$ (en effet si $x = \sum_{n=0}^N x_n$ où $x \in E$, $x_n \in V_n(c, h)$ alors $(L_0 - h)^m x \in E$ pour tout m , en particulier pour $m = 0$ à N , et $\sum_{n=0}^N n^m x_m = (L_0 - h)^m x$, le déterminant de Vandermonde ne s'annule pas, donc $x_n \in E$ pour $n = 0$ à N). On en déduit que tout sous module M de $V(c, h)$ contient le module de Verma $V(c, h + \bar{n})$ où \bar{n} est le plus petit n tel que $M \cap V_n(c, h) \neq \{0\}$.

Ceci explique que les caractères des représentations irréductibles soient des sommes (à coefficients entiers positifs ou négatifs) des caractères des modules de Verma, ce que nous constaterons dans la suite. Ceci entraîne également l'unicité du sous-module maximal de $V(c, h)$.

L'étude des inclusions de modules de Verma est compliquée, mais elle s'appuie entre autres sur l'outil simple suivant : on peut munir le module de Verma $V(c, h)$ d'une forme sesquilineaire en décidant que l'adjoint de L_n est L_{-n} .

Plus précisément, si σ est l'anti-automorphisme de l'algèbre de Virasoro défini par $\sigma(L_n) = L_{-n}$, σ admet une unique extension comme anti-automorphisme de $\mathcal{U}(\text{Vir})$, σ est involutif. Si $x, y \in \mathcal{U}(\mathcal{G})$ on vérifie que $\sigma(x)y|h \rangle$ a une composante suivant $|h \rangle$ qui ne dépend que de $x|h \rangle$ et $y|h \rangle$, celle ci définit donc une forme sesquilineaire symétrique sur $V(c, h)$. L'unitarité de ce produit scalaire est équivalente à l'hermiticité de l'opérateur $\hat{T}(\varrho, \bar{\varrho})$. Une des applications de la forme contragrédiente (c'est la dénomination habituelle de cette forme) est la suivante : $V(c, h)$ est irréductible si et seulement si la forme contragrédiente est non dégénérée. La preuve est simple. D'abord le noyau de la forme est un sous-module (propre car $|h \rangle$ n'y est pas) : en effet si $z|h \rangle$ est dans le noyau et x, y dans $\mathcal{U}(\text{Vir})$ $\sigma(x)yz|h \rangle = \sigma(\sigma(y)x)z|h \rangle$ n'a pas de composante suivant $|h \rangle$ donc $yz|h \rangle$ est aussi dans le noyau. Réciproquement si M est un sous-module propre, nous avons vu que M contenait au moins un vecteur annihilé par les L_n $n \geq 1$. Ce vecteur est forcément dans le noyau, ce qui termine la preuve.

Le calcul du déterminant de la forme contragrédiente (pour laquelle il est clair que $V_n(c, h)$ et $V_{n'}(c, h)$ sont orthogonaux si $n \neq n'$) est très compliqué. Nous donnons simplement le résultat :

si l'on écrit c sous la forme $1 - \frac{6}{m(m+1)}$ où m est en général complexe et où conventionnellement on choisit la branche $m \in]0, \infty[$ pour $c < 1$, et qu'on définit pour r, s entiers positifs

$$h_{rs}(m) = \frac{((m+1)r - ms)^2 - 1}{4m(m+1)}$$

alors le déterminant de la forme contragrédiente dans $V_n(c, h)$ est proportionnel à

$$\prod_{rs \leq n} (h - h_{rs})^{P(n-rs)}$$

où $P(k)$ est le nombre de partitions de k objets, c'est à dire exactement $\dim V_k(c, h)$.

Une étude soigneuse (voir [13]) de ce déterminant permet de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour avoir des représentations irréductibles unitaires de l'algèbre de Virasoro. De telles représentations existent si et seulement si

- soit $c \geq 1 \quad h \geq 0$
- soit $c < 1 \quad c = 1 - \frac{6}{m(m+1)}$ avec m entier ≥ 2 et $h = h_{rs}(m)$ pour $1 \leq s \leq r \leq m - 1$

On ne sait pas (pas encore?) classifier tous les modèles de la première catégorie ; en revanche on sait le faire dans la seconde catégorie, on connaît les théories physiques correspondantes, elles ont la propriété remarquable que les développements à courte distance n'engendrent qu'un nombre fini d'opérateurs primaires. De tels modèles sont dit minimaux (par contraste pour le champ libre $V_\alpha V_{\alpha'} \rightarrow V_{\alpha+\alpha'}$ donc les produits à courte distance engendrent un nombre infini d'opérateurs primaires). Par exemple le point critique du modèle d'Ising est décrit par $m = 3$, $c = \frac{1}{2}$ et les poids des opérateurs sont $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}$ (bien sûr, il y a une partie antiholomorphe correspondante, et l'association entre les deux parties dépend entre autres des conditions aux limites, nous aurons l'occasion d'y revenir).

L'étude des inclusions mutuelles des modules de Verma conduit à la formule suivante (établie dans [37]) pour le caractère de la représentation irréductible χ_{rs} de la représentation $h = h_{rs}$, $c = 1 - \frac{6}{(m+1)m}$

$$\chi_{rs}(q) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\chi_{r+2mk, s}^V - \chi_{r+2mk, -s}^V)$$

3.2.2 Cas des algèbres de Kac Moody

Nous nous intéressons aux représentations de plus haut poids de l'algèbre

$$[J_a^{(m)}, J_b^{(n)}] = F_{ab}^c J_c^{(m+n)} + m\delta_{m+n} K_{ab}$$

Une algèbre de cette forme est appelée algèbre de Kač-Moody, on peut voir cette algèbre comme une extension centrale (le terme contenant K_{ab}) de l'algèbre des applications du cercle dans une algèbre de Lie usuelle (m et n indexent les composantes de Fourier). On peut même faire un pas de plus en considérant une algèbre de Kač-Moody comme l'algèbre de Lie d'une extension centrale du groupe des applications du cercle dans un groupe de Lie, la multiplication étant prise point par point. Alors les difféomorphismes du cercle agissent projectivement sur ce groupe pour donner un produit semi direct. Dans une représentation irréductible de l'algèbre de Kač-Moody on s'attend à ce que l'action des difféomorphismes puisse s'exprimer par la commutation avec des opérateurs de l'algèbre enveloppante, et c'est ce que réalise la construction du tenseur énergie-impulsion comme un produit (renormalisé) de courants, construction que nous avons faite dans le formalisme fonctionnel au chapitre précédent. La théorie des algèbres de Kač-Moody est exposée en détails dans [22].

On suppose que les constantes de structure F_{ab}^c sont celles d'une algèbre de Lie simple \mathcal{G} (dans ce cas on peut démontrer que les extensions centrales non équivalentes ont un seul paramètre) et vérifient $F_{ab}^c F_{dc}^b = \lambda\delta_{ad}$ auquel cas $K_{ad} = K\delta_{ad}$. On note $\hat{\mathcal{G}}$ l'algèbre toute

entière. Il est utile de rajouter un autre générateur \tilde{L} (nous verrons qu'il est relié à L_0) qui calcule la gradation : $[\tilde{L}, J_a^{(n)}] = -nJ_a^{(n)}$. On choisit des générateurs d'un tore de Cartan dans l'algèbre engendrée par les $J_a^{(0)}$, notons les H_i , $i = 1$ à r ; on y adjoint \tilde{L} pour obtenir une sous algèbre abélienne maximale ; alors en diagonalisant la représentation adjointe, on peut indexer les générateurs complétant le tore de Cartan par : un entier $n \in \mathbf{Z}$ et une racine de l'algèbre simple \mathcal{G} ou un entier non nul et un entier de 1 à r et ceci décrit les racines de l'algèbre de Kač-Moody.

$$\begin{aligned} [H_i, J_j^{(n)}] &= 0 & [\tilde{L}, J_j^{(n)}] &= -nJ_j^{(n)} & n \neq 0 \\ [H_i, J_\alpha^{(n)}] &= \alpha(H_i)J_\alpha^{(n)} & [\tilde{L}, J_\alpha^{(n)}] &= -nJ_\alpha^{(n)} \end{aligned}$$

On peut à nouveau construire des modules universels au sens suivant : ce sont des $\mathcal{U}(\hat{\mathcal{G}})$ modules gradués, de graduation non négative, leur sous espace de niveau 0 porte une représentation (éventuellement irréductible) donnée de dimension finie de \mathcal{G} , tout $\mathcal{U}(\hat{\mathcal{G}})$ module ayant la même propriété en est un quotient.

On peut étendre l'isomorphisme de $\hat{\mathcal{G}}$ défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma \text{ vaut l'identité sur le tore de Cartan} \\ \sigma(L_\alpha^{(n)}) = L_{-\alpha}^{(-n)} \quad \sigma(L_i^{(n)}) = L_i^{(-n)} \end{array} \right.$$

à $\mathcal{U}(\hat{\mathcal{G}})$ et utiliser ceci pour définir un produit scalaire. L'unitarité donne alors des contraintes sur les valeurs possibles de K et la représentation de \mathcal{G} qui porte le sous espace de niveau 0.

Illustrons ceci dans le cas où \mathcal{G} est l'algèbre de Lie A_1 (celle de $su(2)$). On part de

$$[J_a^{(m)}, J_b^{(n)}] = i\varepsilon_{ab}{}^c J_c^{(n+m)} + K\delta_{ab}\delta_{n+m}$$

où a, b , et c prennent les valeurs 1, 2, 3. Dans cette normalisation $F_{ab}{}^c F_{dc}{}^b = -\varepsilon_{ab}{}^c \varepsilon_{dc}{}^b = 2\delta_{ad}$.

On définit

$$J_+^{(m)} = J_1^{(m)} + iJ_2^{(m)} \quad J_-^{(m)} = J_1^{(m)} - iJ_2^{(m)}$$

Alors

$$[J_+^{(m)}, J_+^{(n)}] = [J_-^{(m)}, J_+^{(n)}] = 0 \quad [J_3^{(m)}, J_3^{(n)}] = Km\delta_{m+n}$$

$$[J_+^{(m)}, J_-^{(n)}] = 2Km\delta_{m+n} + 2J_3^{(m+n)}$$

$$[J_3^{(m)}, J_+^{(n)}] = J_+^{(m+n)} \quad [J_3^{(m)}, J_-^{(n)}] = -J_-^{(m+n)}$$

Choisissons pour le niveau 0 la représentation de spin s ($2s$ est un entier). En utilisant le théorème de Poincaré-Birkhof-Witt (qui dit qu'en choisissant un ordre pour les générateurs et en considérant uniquement des momômes où les générateurs apparaissent dans l'ordre croissant de la gauche vers la droite on obtient une base de l'algèbre enveloppante) on se convainc aisément que le module universel associé a une base de la forme:

$$J_-^{(-r_1)} \dots J_-^{(-r_k)} J_3^{(-q_1)} \dots J_3^{(-q_j)} J_+^{(-p_1)} \dots J_+^{(-p_i)} (J_+^{(0)})^\ell | -s \rangle$$

où $| -s \rangle$ est le vecteur de niveau 0 de valeur propre $J_3^{(0)} = -s$ et où $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_h \geq 1$; $q_1 \geq q_2 \dots \geq q_j \geq 1$; $p_1 \geq \dots \geq p_i \geq 1$; $2s \geq \ell \geq 0$. Si on note $E_{n,m}$ l'espace de valeur propre $\tilde{L} = n$; $J_3^{(0)} = m$, sa fonctionnelle génératrice est

$$\chi(q, y) = \sum_{n,m} \dim(E_{n,m}) q^n y^m,$$

Les termes liés aux J_3 sont indépendants des autres et donnent

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)}$$

la sommation sur ℓ donne

$$\frac{y^{s+1/2} - y^{-s-1/2}}{y^{1/2} - y^{-1/2}}$$

La somme pour J_- donne

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{-k}}{\prod_{i=1}^k (1 - q^i)}$$

et celle pour J_+ donne

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{\prod_{i=1}^k (1 - q^i)}$$

ce qui donne finalement

$$\chi(q, y) = \frac{y^{s+1/2} - y^{-s-1/2}}{y^{1/2} - y^{-1/2}} \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{-k}}{\prod_{i=1}^k (1 - q^i)} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{\prod_{i=1}^k (1 - q^i)} \right)$$

Finalement à la limite où $y \rightarrow 1$ (le caractère est alors dit spécialisé car on a perdu sa dépendance dans les variables du tore de Cartan) on trouve

$$\chi(q, 1) = (2s + 1) \frac{1}{(\prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k))^3}$$

On remarque que 3 est le nombre de générateurs et $2s + 1$ la dimension de la représentation au niveau 0. Pour une algèbre de Lie simple quelconque on définit les caractères comme des traces

$$\chi(q, y_i) = \text{Tr} q^{\tilde{L}} \prod_i y_i^{H_i}$$

le caractère spécialisé s'obtient en fixant les y_i à 1, ce qui à un facteur multiplicatif près donne le caractère de la représentation de l'algèbre de Virasoro sous jacente. On vérifie alors aisément que les caractères spécialisés pour les modules universels de plus haut poids sont de la forme

$$\dim \mathcal{R} \frac{1}{(\prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k))^{\dim \mathcal{G}}}$$

A nouveau les caractères spécialisés pour les représentations irréductibles seront des sommes alternées de ce type.

Passons aux contraintes : on sait que les représentations unitaires de $su(2)$ ont un spectre entier ou demi entier pour J_3 .

Comme $J_+^{(m)}$, $J_-^{(-m)}$, $J_3^{(0)} + Km$ engendrent une sous algèbre $su(2)$ de $\hat{\mathcal{G}}$ et $(J_3^{(0)} + Km)|-s\rangle = -s + Km|-s\rangle$ il faut que $2(-s + Km)$ soit entier pour tout m donc $2K$ est entier; $K = \frac{k}{2}$ avec k entier. De plus si m est strictement positif $J_+^{(m)}$ anihile $|-s\rangle$ donc $J_3^{(0)} + \frac{k}{2}m$ est positif sur $|-s\rangle$; $-s + \frac{k}{2}m \geq 0$. Prenant m grand, ceci impose $k \geq 0$ alors $m = 1$ donne $\frac{k}{2} \geq s$.

Donc l'algèbre de Kac Moody pour $su(2)$ dans nos normalisations n'a de représentations unitaires que (il se trouve que nos conditions sont nécessaires et suffisantes) si k est un entier et si le spin s de la représentation de $su(2)$ au niveau zéro vérifie $s \leq \frac{k}{2}$ soit $2s + 1 \leq k + 1$. La valeur propre de l'opérateur de Casimir de la représentation s est $s(s + 1)$. Donc la charge centrale est

$$c = \frac{2K \dim \mathcal{G}}{2K + \lambda} = \frac{3k}{k + 2}$$

et les poids conformes possibles sont

$$h = \frac{s(s + 1)}{k + 2} \text{ pour } s \leq \frac{k}{2}$$

De même la considération de sous algèbres $su(2)$ dans $\hat{\mathcal{G}}$ permet de trouver des contraintes sur les valeurs de K et les représentations possibles au degré 0 à K donné.

Nous allons décrire ces résultats très explicitement pour $su(N)$ que nous utiliserons très souvent dans la suite.

Le réseau des racines M de $su(N)$ est engendré par $N - 1$ racines simples $\alpha_i = \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{i+1}$ où les vecteurs \mathbf{e}_μ , $\mu = 1, \dots, N$ forment une base orthonormée de \mathbf{R}^N . La métrique est donnée par la matrice de Cartan $g_{ij} = \alpha_i \cdot \alpha_j$, égal à 2, -1, 0 suivant que $|i - j| = 0, 1$ ou > 1 respectivement. Notons que c'est ici que nous fixons la normalisation pour λ en fixant la norme des racines longues ($su(N)$ est une algèbre de Lie simplement lacée donc toutes les racines ont la même longueur). Le groupe de Weyl W de $su(N)$, isomorphe à S_N , d'ordre $N!$ (c'est en fait le groupe de permutation des \mathbf{e}_μ) est engendré par les réflexions par rapport aux hyperplans orthogonaux aux racines simples. Il laisse M et son dual M^* (engendré par les poids fondamentaux α^i , tels que $\alpha^i \cdot \alpha_j = \delta_j^i$, $\alpha^i = g^{ij} \alpha_j$, $g^{ij} = Inf(i, j) - \frac{ij}{N}$) invariants.

La condition de quantification est la même que pour le cas particulier $N = 2$: $2K$ doit être un entier k qu'on appelle le niveau ($n = k + N$ est l'altitude). Les représentations intégrables de l'algèbre de Kač-Moody correspondante sont indexées par des poids positifs \mathbf{p} satisfaisants $p_i = \mathbf{p} \cdot \alpha_i > 0$ et $\sum_i p_i < N$. On désigne par B_n ce domaine fondamental des poids.

Comme dans le cas des algèbres semi simples, les caractères sont des quotients de sommes alternées sur le groupe de Weyl. Dans le cas affine ce groupe W_{aff} est le produit semi direct de W et des translations du réseau nM , il est engendré par les réflexions dans les N hyperplans bordant B_n .

Définissons d'abord des fonctions théta du réseau (liées comme on le voit au noyau de la chaleur)

$$\Theta_{n, \mathbf{p}}(\mathbf{x}, \tau) = \sum_{\mathbf{r} \in M} e \left(\tau \frac{n}{2} \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{n} \right)^2 + n \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{n} \right) \cdot \mathbf{x} \right)$$

où $e(z)$ désigne $\exp(2i\pi z)$, $\tau \in \mathbf{C}$, $\text{Im}\tau > 0$, \mathbf{x} est dans l'hyperplan du réseau des racines et \mathbf{p} est un poids quelconque. On remarque qu'en fait $\Theta_{n,\mathbf{p}}$ ne dépend de \mathbf{p} que par sa classe modulo nM . On note G_n le groupe quotient M^*/nM , c'est un groupe abélien, isomorphe à $\mathbf{Z}_{nN} \times \mathbf{Z}_n^{N-2}$ comme on le vérifie en remarquant que $\alpha^1, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-2}$ forment une base du réseau des poids et qu'un poids est dans nM si et seulement si sa composante suivant α^1 est multiple de nN et ses composantes suivant les α_i , $i = 1, N-2$ sont des multiples de n . On antisymétrise sur \mathbf{x} pour obtenir (si ${}^w\mathbf{x}$ désigne l'action de w dans W ou W_{aff} sur \mathbf{x} et $\varepsilon(w)$ le déterminant de la transformation linéaire associée à w)

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \hat{\Theta}_{n,\mathbf{p}}(\mathbf{x}, \tau) &= \sum_{w \in W} \varepsilon(w) \Theta_{n,\mathbf{p}}({}^w\mathbf{x}, \tau) \\ &= \sum_{w \in W_{aff}} \varepsilon(w) e\left(\frac{\tau}{2n}({}^w\mathbf{p})^2 + n({}^w\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}\right) \end{aligned}$$

Sous cette forme il est clair que $\hat{\Theta}_{n,\mathbf{p}}$ ne dépend (modulo un signe) que de l'orbite de \mathbf{p} sous l'action de W_{aff} , et que B_n est un domaine fondamental pour cette action (les poids sur le bord de B_n donnent par antisymétrie une fonction $\hat{\Theta}$ identiquement nulle). Il y a encore une isométrie dont l'action sur les caractères a une grande importance, c'est la conjugaison de charge. Cette transformation est la restriction à l'hyperplan des racines de la transformation d'ordre deux

$$C \quad \mathbf{e}_\mu \rightarrow -\mathbf{e}_{N+1-\mu}$$

qui laisse B_n invariant car elle transforme α^i en α^{N-i} . C'est le produit de l'inversion et d'un élément du groupe de Weyl de signature $(-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}$ donc

$$\hat{\Theta}_{n,C(\mathbf{p})}(\mathbf{x}, \tau) = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \hat{\Theta}_{n,\mathbf{p}}(C(\mathbf{x}), \tau)$$

Si $n = N$, B_N ne contient que le poids \mathbf{p}_0 tel que $\mathbf{p}_0 \cdot \alpha_i = 1$, $\mathbf{p}_0^2 = \frac{N(N^2-1)}{12}$. On peut alors démontrer que le caractère de la représentation intégrable de $su(N)$ à la hauteur n associée à $\mathbf{p} \in B_n$ est

$$\chi_{n,\mathbf{p}} = \frac{\hat{\Theta}_{n,\mathbf{p}}}{\hat{\Theta}_{N,\mathbf{p}_0}}$$

Le niveau fondamental porte la représentation \mathbf{p} de l'algèbre de dimension finie sous jacente.

En prenant la limite singulière $\mathbf{x} \rightarrow 0$ on obtient pour le caractère spécialisé la formule suivante

$$\begin{aligned} \chi_{n,\mathbf{p}}(\tau) &= \text{Tr}_{\mathbf{p}} e(\tau[L_o - c/24]) \\ &= \frac{\sum_{\mathbf{r} \in M} \dim[n\mathbf{r} + \mathbf{p}] e\left(\tau \frac{n}{2}(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{n})^2\right)}{\sum_{\mathbf{r} \in M} \dim[N\mathbf{r} + \mathbf{p}_0] e\left(\tau \frac{N}{2}(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}_0}{N})^2\right)} \end{aligned}$$

où les dimensions sont le prolongement des formules pour celles de plus haut poids de l'algèbre finie (on plie dans le domaine des poids positifs avec W en tenant compte du signe).

En fait le dénominateur est simplement la puissance $N^2 - 1$ ième (c'est la dimension de $su(N)$) de

$$\eta(q) = q^{1/24} \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j) \text{ pour } q = e(\tau)$$

conformément à l'estimation simple du début. (Ceci est la plus simple des identités de Dyson et Macdonald, et elle résulte de l'identité des propriétés modulaires des deux fonctions). Remarquons que les caractères spécialisés correspondants à des poids conjugués sont identiques.

En évaluant les termes dominants des caractères on vérifie que la charge centrale est bien

$$c = \frac{k(N^2 - 1)}{N + k} = \left(\frac{N}{n} - 1\right)(N^2 - 1)$$

et les poids conformes

$$h_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}^2 - \mathbf{p}_0^2}{2n}$$

en accord avec les résultats du chapitre 2.

3.3 Algèbres chirales et théories rationnelles

Comme le montrent les exemples d'algèbres de courants, il est fréquent que les théories conformes possèdent des symétries étendues. En général elles ne sont pas du type algèbre de Lie (à moins de considérer tout l'algèbre enveloppante), mais elles proviennent de courants conservés qui sont des champs primaires chiraux (c'est à dire de dimensions $(h, 0)$, h entier positif) qui forment une famille fermée pour les développements en produits d'opérateurs (on peut bien sur aussi avoir des symétries étendues dans le secteur antiholomorphe, auquel les considérations suivantes se transposent immédiatement, la corde hétérotique étant l'exemple le plus connu où les algèbres chirales droites et gauches ne sont pas isomorphes). On peut citer par exemple le cas $h = 3$ correspondant aux algèbres W_3 (voir [55]). Si les \hat{A}_a engendrent une telle symétrie on écrit :

$$\hat{A}_a(\varrho, \bar{\varrho}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_a^{(n)} z^{-n}$$

et en appliquant (3.2) on obtient que les $A_a^{(n)}$ vérifient

$$[L_m, A_a^{(n)}] = (m(h - 1) - n)A_a^{(n+m)},$$

donc l'algèbre \mathcal{A} engendrée par les $A_a^{(n)}$ est graduée et L_0 compte le degré. En particulier les opérateurs de degré $n = 0$ forment une sous algèbre $\mathcal{A}^{(0)}$. Les conditions de régularité à l'origine imposent à nouveau que les représentations de l'algèbre chirale formée par les $A_a^{(n)}$ soient de plus haut poids, et celles qui sont irréductibles sont construites par application des opérateurs $A_a^{(n)}$, $n < 0$ sur la représentation de $\mathcal{A}^{(0)}$ portée par le degré 0. En général l'algèbre chirale est munie d'une involution qui permet une définition algébrique de l'hermiticité. Si l'on adjoint à L_0 une famille maximale de générateurs autoadjoints de l'algèbre chirale qui commutent (ceci impose

en fait, vu le caractère universel des relations de commutation avec L_0 , que ces générateurs sont choisis dans \mathcal{A}_0) on peut diagonaliser ces générateurs simultanément et définir un caractère abstrait comme une fonctionnelle génératrice des dimensions des sous espaces correspondants à des valeurs propres données de ces générateurs. Une condition importante est que les opérateurs à degré n donné soient en nombre fini et que la représentation au degré 0 soit de dimension finie. Ceci est souvent une conséquence de l'unitarité. Alors on peut spécialiser le caractère en ne regardant plus que les valeurs propres de L_0 c'est à dire considérer

$$\chi = \text{Tr} q^{L_0 - \frac{c}{24}}$$

A partir d'une représentation de plus haut poids on peut toujours obtenir une représentation duale (elle est construite en prenant la représentation duale ou conjuguée usuelle au degré 0 et en appliquant les opérateurs de degré négatif) qui est aussi de plus haut poids et qui peut être ou ne pas être équivalente à la première. Comme l'algèbre de Virasoro est réelle (si la charge centrale et les poids sont réels) une représentation et sa conjuguée ont même caractère spécialisé, donc en particulier même poids conforme). Comme d'habitude, à chaque représentation irréductible de plus haut poids de \mathcal{A} est associé une famille primaire (c'est à dire une famille de champs dont les singularités dans le produit à courte distance avec les champs de l'algèbre chirale sont minimales et ont une forme irréductible). A nouveau ceci entraîne des identités de Ward qui fixent univoquement les fonctions de corrélation avec insertion de champs de \mathcal{A} en termes des fonctions de corrélation contenant uniquement les champs primaires. Tous les champs de la théorie sont engendrés par développements à courte distance entre champs primaires et champs de l'algèbre chirale.

Les cas les plus maniables de théories conformes (ce sont eux que certains optimistes espèrent pouvoir complètement classer) sont ceux pour lesquels les algèbres chirales droite et gauche n'ont qu'un nombre fini de représentations irréductibles (et disons unitaires) une fois que les charges centrales (c pour l'algèbre de Virasoro, K pour une algèbre de Kač-Moody) ont été fixées. Ceci est une généralisation naturelle des modèles minimaux pour lesquels l'algèbre chirale se réduisait à l'algèbre de Virasoro. De telles théories sont dites rationnelles, la terminologie étant justifiée par les propriétés algébriques simples des charges centrales et des poids conformes dans ces théories. Elles ont été introduites dans un cadre géométrique dans [12] et ensuite axiomatisées dans un cadre algébrique (voir par exemple [32]).

L'espace de Hilbert d'une théorie rationnelle se décompose donc sous la forme

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i, \bar{j}} N^{i, \bar{j}} \mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_{\bar{j}}$$

où les $N^{i, \bar{j}}$ sont des entiers positifs ou nuls, et i et \bar{j} indexent les représentations (en nombre fini) des algèbres chirales droite et gauche. La fonctionnelle génératrice des dimensions des espaces de degré donné s'écrit alors

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}} q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{c}{24}} = \sum_{i, \bar{j}} N^{i, \bar{j}} \chi_i(q) \chi_{\bar{j}}(\bar{q})$$

Jusqu'à présent q et \bar{q} étaient des variables formelles, mais souvent les caractères ont un sens comme fonctions analytiques dans le disque unité pointé, ce qui signifie que les dimensions des

représentations à degré donné ne croissent pas trop vite. L'interprétation, due à Cardy (voir [7]), de cette fonction génératrice comme une fonction de partition physique sur un tore, avec les conditions de symétrie qui en résultent et dont les conséquences sont très contraignantes, a été l'un des progrès majeur dans la compréhension des modèles conformes. Nous y consacrerons une bonne partie du chapitre suivant.

Chapter 4

Conditions aux limites

Lors du calcul de la fonction de partition d'un système de mécanique statistique des arguments généraux montrent que la contribution extensive à l'énergie libre est indépendante des conditions aux limites. Les théories conformes ne s'intéressent pas habituellement à ces termes extensifs mais plutôt à certains termes sous dominants (parties finies, etc). Rien d'étonnant donc que les conditions aux limites y jouent un rôle prépondérant. Le but de ce chapitre est d'en donner un aperçu.

4.1 Fonction de partition sur le tore

Considérons un système critique en géométrie finie, par exemple un rectangle de côtés l_1 et l_2 , avec conditions périodiques dans la direction x (nous fixons plus loin les conditions aux limites dans la direction y)

$$\begin{cases} x & \rightarrow & x + l_1 \\ y & \rightarrow & y \end{cases}$$

Posant

$$\varrho = \frac{2i\pi}{l_1}(x + iy)$$

l'application $z = e^\varrho$ transforme le rectangle en une couronne du plan des z . La transformation étant conforme la fonction de partition est numériquement invariante. Imaginons par exemple que les conditions aux limites suivant l_2 soient aussi périodiques. Si $\varrho = \tau + i\sigma$, τ varie de 0 à $-2\pi l_2/l_1$ donc dans le formalisme opératoire (matrice de transfert)

$$Z = Tr e^{-2\pi \frac{l_2}{l_1} \hat{H}}$$

Déformons alors le rectangle en un parallélogramme, avec à nouveau des conditions périodiques en

$$\begin{cases} x & \rightarrow & x + l_1 \\ y & \rightarrow & y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x & \rightarrow & x + l_3 \\ y & \rightarrow & y + l_2 \end{cases}$$

C'est l'opérateur d'impulsion qui translate dans la direction des x donc

$$(4.1) \quad Z = Tr e^{-2\pi \frac{l_2}{l_1} \hat{H} + 2i\pi \frac{l_3}{l_1} \hat{P}}$$

Au chapitre 3 nous avons identifié \hat{H} comme $L_0 + \bar{L}_0 - c/12$ et \hat{P} avec $L_0 - \bar{L}_0$. Si l'on pose $\tau = \frac{l_3}{l_1} + i\frac{l_2}{l_1}$ alors

$$Z = Tr e^{2i\pi\tau(L_0 - \frac{c}{24})} e^{2i\pi\bar{\tau}(\bar{L}_0 - \frac{c}{24})}$$

Le fait remarquable est qu'il y a plusieurs situations physiques identiques amenant à des τ différents. Par exemple on peut choisir l'axe des x suivant l'autre direction du parallélogramme. On se convainc aisément que ceci correspond à la transformation $\tau \rightarrow -1/\tau$. De la même manière si l'on voit notre système avec conditions doublement périodiques comme le quotient du plan complexe par le réseau engendré par 1 et τ changer τ en $\tau + 1$ ne change pas la physique. On note

$$\begin{cases} S : & \tau \rightarrow -1/\tau \\ T : & \tau \rightarrow \tau + 1 \end{cases}$$

Le groupe engendré par S et T est celui des transformations modulaires, c'est à dire de la forme

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \text{ avec } a, b, c, d \in \mathbf{Z} \text{ et } ad - bc = 1$$

Il se note $PSL_2(\mathbf{Z})$ et les relations fondamentales vérifiées par S et T sont

$$S^2 = 1 \quad \text{et} \quad (ST)^3 = 1$$

On s'attend donc à ce que Z soit invariant dans une transformation modulaire, ce qui nous le verrons est une propriété très contraignante (l'idée d'exploiter cette invariance est due à Cardy (voir [7])). Pour cette invariance la présence du facteur $c/24$ est tout à fait essentielle, ce qui valide encore le choix du point zéro dans le Hamiltonien. Dans le cas d'une théorie rationnelle on impose donc que

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \sum_{i, \bar{j}} N^{i, \bar{j}} \chi_i(\tau) \overline{\chi_{\bar{j}}(\tau)}$$

(où la somme est finie) soit invariant. On impose en général aussi que la représentation de l'algèbre dont l'espace de degré zéro est le vide de la théorie apparaisse une seule fois (existence et unicité du vide), ce qui fixe la normalisation de Z . On voit donc que l'invariance modulaire contraint à charge centrale donnée le contenu en opérateurs du modèle, en donnant les multiplicités $N^{i, \bar{j}}$. Nous verrons plus loin qu'en fait le groupe modulaire agit linéairement et unitairement sur les caractères. Alors l'invariance modulaire de la fonction de partition se réduit à la commutation de la matrice $N^{i, \bar{j}}$ avec les matrices représentant S et T , et en conséquence il existe toujours un invariant dit diagonal, associé à la matrice identité.

4.2 Le champ libre sur le tore

Au chapitre 1 nous avons calculé la variation du déterminant du Laplacien lors d'un changement de métrique, et remarqué l'existence de plusieurs classes conformes de métriques caractérisées par des modules. Pour le genre 1, l'espace des modules est la sphère privée d'un point (le point correspond au tore singulier qui est un cylindre) que l'on peut voir géométriquement comme le quotient du demi plan supérieur de la variable τ par le groupe $PSL_2(\mathbf{Z})$. Nous sommes

maintenant en mesure d'évaluer explicitement la dépendance en τ du déterminant du Laplacien sur le tore. Nous suivons ici le traitement de [21]. On choisit dans chaque classe conforme de métriques une métrique plate (invariante par translation), c'est à dire celle qui est directement induite par celle du plan \mathbf{C} quotienté par le réseau engendré par ω_1 et ω_2 , deux nombres complexes dont on peut supposer qu'ils satisfont à $Im(\omega_2/\omega_1) > 0$. On pose

$$\tau = \omega_2/\omega_1 \quad l = |\omega_1|$$

Les valeurs propres du Laplacien (précisément de $-\Delta/4\pi$) sont

$$\lambda_{m,n} = \frac{\pi}{(lIm\tau)^2} |m\tau - n|^2$$

avec m, n entiers. Nous laissons maintenant de coté le mode zéro $(\lambda_{0,0})$ et utilisons la régularisation zéta. Nous cherchons donc à prolonger analytiquement en $s = 0$ la fonction définie pour $Re\ s > 1$ par

$$(4.2) \quad \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \left(\frac{\pi}{(lIm\tau)^2} |m\tau - n|^2 \right)^{-s}$$

En séparant les termes $m \neq 0$ des termes $m = 0$ on obtient

$$(4.3) \quad \left[\frac{(lIm\tau)^2}{\pi} \right]^s \left(2 \sum_{n>0} n^{2s} + \sum_{m \neq 0} \sum_n |m\tau - n|^{-2s} \right)$$

Mais $\sum_n |m\tau - n|^{-2s}$ est une fonction périodique de période 1 de la variable $mRe\ \tau$ donc on peut l'écrire

$$\sum_p a_p(mIm\tau) e^{2i\pi p m Re\ \tau}$$

avec

$$\begin{aligned} a_p(mIm\tau) &= \int_0^1 \sum_n |x - n + iIm\tau|^{-2s} e^{-2i\pi p x} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 + m^2 Im^2 \tau)^{-s} e^{-2i\pi p x} \end{aligned}$$

Donc la somme double dans (4.3) vaut

$$\sum_{m \neq 0} \sum_p \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 + m^2 Im^2 \tau)^{-s} e^{2i\pi p(mRe\ \tau - x)}$$

On insère alors l'identité $\Gamma(s)a^{-s} = \int_0^{+\infty} e^{-at} t^{s-1} dt$ et on calcule l'intégrale gaussienne sur x ce qui donne

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} \sum_{m \neq 0} \sum_p \int_0^{+\infty} e^{-tm^2 Im^2 \tau} e^{2i\pi p m Re\ \tau} e^{-\pi^2 p^2 / t} t^{s-3/2}$$

Les termes correspondants à $p = 0$ donnent

$$2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)} (Im\tau)^{1-2s} \zeta(2s-1)$$

Quant aux autres termes en faisant le changement de variable

$$u = t \frac{|m|Im \tau}{\pi|p|}$$

ils contribuent pour

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} \sum_{m \neq 0} \sum_{p \neq 0} e^{2i\pi pm Re \tau} \left(\frac{|m|Im \tau}{\pi|p|} \right)^{-(s-1/2)} \int_0^{+\infty} e^{-\pi Im \tau |mp|(u+1/u)}$$

Le résultat obtenu après ces manipulations admet un prolongement analytique au voisinage de l'origine. Si l'on se souvient que

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s + O(s^2) \quad \zeta(s) = -\frac{1}{2}(1 + s \ln 2\pi) + O(s^2) \quad \zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

et

$$\int_0^{+\infty} du e^{-a(u+1/u)} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2a}$$

(la méthode du col est exacte) on obtient pour la dérivée en zéro de l'expression (4.2)

$$-2 \ln 2\pi - \ln \frac{l^2 Im^2 \tau}{\pi} + \frac{\pi}{3} Im \tau + 2 \sum_{m \neq 0} \sum_{p > 0} \frac{1}{p} e^{2i\pi pm Re \tau} e^{-2\pi |m|p Im \tau}$$

En fait ce résultat était déjà connu de Kronecker (voir [48]). La contribution à la fonction de partition du champ libre sur le tore est l'exponentielle de la moitié de ce résultat, soit (en posant $q = e(\tau)$)

$$\left[\sqrt{4\pi l Im \tau} (q\bar{q})^{1/24} \prod_{m>0} (1 - q^m)(1 - \bar{q}^m) \right]^{-1}$$

Ceci est proportionnel au module carré de la fonction de Dedekind, et comme au chapitre 1 nous avons vu que la contribution du mode zéro était la racine de l'aire de la surface soit $l\sqrt{Im \tau}$ l'échelle de longueur disparaît comme il se doit du résultat final

$$Z = \frac{1}{(4\pi Im \tau)^{1/2}} \frac{1}{|\eta(q)|^2}$$

On sait que η^{24} est une forme modulaire de poids 12, on en déduit que sous l'action de S

$$|\eta(q)|^2 \rightarrow |\tau| |\eta(q)|^2$$

Ceci compense exactement la variation de $Im \tau$ donc Z est bien un invariant modulaire. Notons que la contribution du mode zéro est tout à fait essentielle.

Nous avons donc mené à bien le calcul complet de l'action de Liouville sur le tore avec toute sa dépendance modulaire. On a ici une nouvelle occasion de vérifier que le champ libre n'est pas une théorie rationnelle car Z n'est pas une forme sesquilineaire finie de caractères. Si l'on

se souvient que les opérateurs de vertex V_α avaient des poids $(\alpha^2/2, \alpha^2/2)$ et que le caractère du module de Verma associé était $q^{\alpha^2/2}/\eta(q)$ on peut décomposer Z de la façon suivante

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{\sqrt{2\pi}} \frac{q^{\alpha^2/2}}{\eta(q)} \frac{\bar{q}^{\alpha^2/2}}{\eta(\bar{q})}$$

suggérant que tous les opérateurs de vertex contribuent à la fonction de partition avec une densité uniforme.

Dans le cas du champ libre il est aussi possible de calculer la fonction de partition avec conditions au bord antipériodiques dans l'une ou l'autre direction, ceci donnant lieu à quatre fonctions de partition Z_{PP} (qu'on vient de calculer) Z_{AP} , Z_{PA} et Z_{AA} . Les trois derniers spectres sont au facteur $\pi/l^2 I m^2 \tau$ près

$$|(m + 1/2)\tau - n|^2 \quad |m\tau - (n + 1/2)|^2 \text{ et } |(m + 1/2)\tau - (n + 1/2)|^2$$

notés respectivement S_{AP} , S_{PA} et S_{AA} (m, n sont des entiers arbitraires). Ils ne contiennent pas zéro, ce qui dans ce cas particulier implique que $\zeta(0) = 0$, donc que la fonction de partition est indépendante de la normalisation du spectre. On peut s'en convaincre de manière directe en refaisant pas à pas le calcul précédent pour ces nouvelles conditions aux limites, mais on dispose ici d'un argument très simple : les dilatations sont des transformations conformes globales connexes à l'identité, donc la fonction de partition ne doit pas dépendre de la taille du système; mais en l'absence de mode zéro seul le spectre fait intervenir cette taille (notons que ceci est bien cohérent avec la forme (4.1) pour la fonction de partition). Dans la transformation $\tau \rightarrow -1/\tau$ les spectres se transforment de la manière suivante

$$S_{AP} \rightarrow |\tau|^2 S_{PA} \quad S_{PA} \rightarrow |\tau|^2 S_{AP} \quad S_{AA} \rightarrow |\tau|^2 S_{AA}$$

donc Z_{AP} et Z_{PA} s'échangent et Z_{AA} est invariant. De même dans la transformation $\tau \rightarrow \tau + 1$

$$S_{AP} \rightarrow S_{AA} \quad S_{AA} \rightarrow S_{AP} \quad S_{PA} \rightarrow S_{PA}$$

donc Z_{AP} et Z_{AA} s'échangent et Z_{PA} est invariant, comme on s'y attend intuitivement.

Le calcul exact des fonctions de partition suit la même stratégie que dans le cas doublement périodique et on obtient

$$\begin{aligned} Z_{AP} &= \frac{|\eta(q)|^2}{|\eta(q^{1/2})|^2} = |d_{AP}(q)|^{-2} \\ Z_{PA} &= \frac{|\eta(q)|^2}{2|\eta(q^2)|^2} = \frac{1}{2}|d_{PA}(q)|^{-2} \\ Z_{AA} &= \frac{|\eta(q^2)|^2 |\eta(q^{1/2})|^2}{|\eta(q)|^4} = |d_{AA}(q)|^{-2} \end{aligned}$$

où les fonctions d sont des parties holomorphes de déterminants associés au fermion libre sur le tore avec les conditions aux limites correspondantes. On peut vérifier sans trop de peine que ces fonctions de partition obéissent bien aux lois de transformation déduites ci-dessus.

Il existe une classe de modèles qui comme le champ libre possèdent une symétrie \mathbf{Z}_2 ([56, 6]). On peut les voir comme des versions multicritiques du modèle d'Ising, et ce qui correspond à

changer φ en $-\varphi$ est le retournement des spins. Commençons par le modèle d'Ising habituel, car c'est vraiment celui pour lequel l'intuition physique est la plus développée. On peut démontrer de bien des manières qu'il est équivalent à une théorie de fermions libres, nous en mentionnons très brièvement une (développée dans [35]) qui illustre notre propos: sur le réseau carré en géométrie infinie on considère un opérateur de désordre μ , localisé sur le réseau dual et dont l'effet est d'inverser la valeur du couplage des spins le long d'une ligne partant à l'infini. La position de cette ligne est sans effet sur la fonction de partition car changer les couplages le long d'une ligne qui partage le plan en deux régions (c'est à dire une ligne qui est un bord) revient à retourner les spins d'un côté de cette ligne. Un spin forme avec les quatre opérateurs de désordre les plus proches un opérateur composite à quatre composantes ψ dont l'insertion dans les fonctions de corrélation obéit à une équation linéaire discrète (bien sûr s'il y a plusieurs opérateurs il y a des termes de contact). On détermine le point critique en cherchant des solutions qui ne décroissent pas à l'infini, pour une certaine température positive apparaissent deux solutions indépendantes, qui à la limite continue obéissent à l'équation de Dirac pour un fermion libre de masse nulle (les deux autres composantes étaient restées massives et ont donc disparu à la limite continue). On sait qu'à deux dimensions, le fermion de masse nulle a une charge centrale $c = 1/2$ et comme les poids de Boltzmann sont réels positifs on s'attend à une théorie unitaire. On reconnaît alors la théorie minimale $m = 3$ et il est possible de montrer que la seule forme sesquilinéaire à coefficients entiers positifs dans les caractères (c'est à dire le seul candidat pour Z_{PP}) invariant modulaire (ce sera une de nos préoccupations dominantes d'essayer de calculer dans des cas plus généraux tous les invariants modulaires possibles) est

$$|\chi_0|^2 + |\chi_{1/2}|^2 + |\chi_{1/16}|^2$$

D'un autre point de vue, il est possible de calculer le déterminant de l'opérateur de Dirac sur le tore avec des conditions aux limites périodiques ou antipériodiques dans chacune des directions. A cause du mode zéro la contribution doublement périodique est nulle, et pour des raisons tout à fait analogues à celles que nous avons vues dans le cas du champ libre seule la somme des trois autres fonctions de partition est un invariant modulaire, qui s'exprime avec les fonctions d que nous avons définies ci dessus

$$Z_{fermions} = |d_{AP}|^2 + |d_{AA}|^2 + 2|d_{PA}|^2$$

Il coïncide avec celui que nous venons d'écrire à un facteur multiplicatif près (qu'on peut absorber dans la normalisation) car

$$\chi_0 = \frac{1}{2}(d_{AA} + d_{AP}) \quad \chi_{1/2} = \frac{1}{2}(d_{AA} - d_{AP}) \quad \chi_{1/16} = d_{PA}$$

relations qui résultent d'identités classiques sur les fonctions théta usuelles.

Intuitivement l'explication de ce phénomène est que sur le tore les opérateurs de désordre existent forcément par paires (il ne peut pas y avoir de lignes partant à l'infini) et que la périodicité des paires impose seulement la périodicité ou l'antipériodicité des fermions. Même dans ce cas très simple nous avons été confrontés à des problèmes un peu subtils, car les fermions qui permettent de résoudre le modèle sont des opérateurs composites et non locaux en termes des spins, ils n'obéissent pas aux mêmes conditions aux limites et il n'y a pas un champ fondamental

mais des champs fondamentaux qui ne sont présents explicitement dans le spectre que pour certaines conditions au bord. Bien sûr, ceci est une conséquence du fait que l'on ne s'intéresse pas aux termes extensifs de la fonction de partition, mais seulement à des termes sous dominants.

Nous avons donc une décomposition de l'espace de Hilbert de la théorie

$$\mathcal{H}_P = \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_{1/2} \otimes \mathcal{H}_{1/2} \oplus \mathcal{H}_{1/16} \otimes \mathcal{H}_{1/16}$$

Si Σ est l'opérateur qui retourne les spins, la fonction de partition avec conditions 'temporelles' antipériodiques est simplement

$$Z_{PA} = \text{Tr} \Sigma q^{L_0 - c/24} \bar{q}^{\bar{L}_0 - c/24}$$

et Σ commute avec L_0 et \bar{L}_0 à cause de la symétrie du problème dans le retournement des spins. Alors

$$Z_{PA} = \epsilon_0 |\chi_0|^2 + \epsilon_{1/2} |\chi_{1/2}|^2 + \epsilon_{1/16} |\chi_{1/16}|^2$$

où les ϵ_i sont des signes. La transformation modulaire S transforme Z_{PA} en Z_{AP} . Mais on s'attend à ce que cette fonction de partition soit à nouveau une trace prise sur un nouvel espace de Hilbert, donc une nouvelle combinaison sesquilineaire à coefficients entiers positifs de caractères. La seule solution est $\epsilon_0 = \epsilon_{1/2} = -\epsilon_{1/16} = 1$ qui donne

$$Z_{AP} = \chi_0 \bar{\chi}_{1/2} + \chi_{1/2} \bar{\chi}_0 + |\chi_{1/16}|^2$$

et ceci est conforme à l'interprétation des champs $(0, 0)$ et $(1/2, 1/2)$ comme l'identité et l'énergie (pairs dans la transformation Σ) et $(1/16, 1/16)$ comme le spin (impair dans Σ). Le Hamiltonien antipériodique est

$$\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_{1/2} \oplus \mathcal{H}_{1/2} \otimes \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_{1/16} \otimes \mathcal{H}_{1/16}$$

et les opérateurs $(0, 1/2)$ et $(1/2, 0)$ représentent l'anti-fermion et le fermion. La fonction de partition avec conditions doublement antipériodiques s'obtient en insérant un nouvel opérateur Σ dans la trace donnant Z_{AP} , ce qui introduit des signes. L'invariance de Z_{AA} dans la transformation S les détermine et finalement on obtient

$$Z_{AA} = -\chi_0 \bar{\chi}_{1/2} - \chi_{1/2} \bar{\chi}_0 + |\chi_{1/16}|^2$$

ce qu'on aurait pu voir directement en appliquant T à Z_{AP} .

Dans les cas plus compliqués, la structure des champs fondamentaux peut être plus complexe, et il n'est pas évident de savoir ce qu'on entend par conditions aux limites. Bien souvent on connaît un modèle intégrable dont la limite critique redonne la théorie conforme que l'on considère. Sur le réseau il est très facile de comprendre les conditions au bord physiques, mais les calculs directs dans le discret peuvent être très pénibles. Cette approche est suivie dans l'article 1. Il est aussi parfois possible de deviner directement l'existence de certaines symétries dans la théorie conforme. Par exemple pour les théories minimales $c = 1 - \frac{6}{m(m+1)}$, $m \geq 3$ on connaît un invariant modulaire simple, l'invariant diagonal

$$Z_{PP} = \sum_{(r,s)} |\chi_{r,s}|^2$$

correspondant à

$$\mathcal{H}_P = \bigoplus_{(r,s)} \mathcal{H}_{r,s} \otimes \mathcal{H}_{r,s}$$

Ce n'est pas toujours le seul, mais concentrons-nous sur celui ci pour l'instant. On peut montrer que ces fonctions de partition sont associées à des versions multicritiques du modèle d'Ising, donc possèdent une symétrie \mathbf{Z}_2 . Nous allons vérifier ce dernier point. Pour obtenir Z_{PA} on insère des signes dans Z_{PP} révélant le caractère pair ou impair des opérateurs. La transformation S donne Z_{AP} qui doit être une trace. On vérifie aisément que ces contraintes ont une solution

$$Z_{PA} = \sum_{(r,s)} (-1)^{(m+1)r-m-s+1} \chi_{r,s} \bar{\chi}_{r,s}$$

$$Z_{AP} = \sum_{r+s \leq m} \chi_{r,s} \bar{\chi}_{m-r,s} + \sum_{r+s \geq m+1} \chi_{r,s} \bar{\chi}_{(r,m+1-s)}$$

dont on déduit la structure de l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H}_A = \bigoplus_{r+s \leq m} \mathcal{H}_{r,s} \otimes \mathcal{H}_{m-r,s} \bigoplus \bigoplus_{r+s \geq m+1} \mathcal{H}_{r,s} \otimes \mathcal{H}_{r,m+1-s}$$

L'opérateur impair de poids conforme le plus bas est $(2, 2)$ avec $h_{2,2} = \frac{3}{4m(m+1)}$ et il est tentant d'identifier l'exposant magnétique avec $4h_{2,2}$, qui redonne $1/4$ pour le modèle d'Ising. On peut alors s'assurer que

$$Z_{AA} = (-1)^{m(m+1)/2} \sum_{r+s \leq m} (-1)^{(m+1)r-m-s} \chi_{r,s} \bar{\chi}_{m-r,s} \sum_{r+s \geq m+1} (-1)^{(m+1)r-m-s} \chi_{r,s} \bar{\chi}_{(r,m+1-s)}$$

est invariant dans la transformation S . Il est donc parfaitement cohérent de supposer que le système possède une symétrie \mathbf{Z}_2 .

4.3 Invariance conforme en géométrie semi-infinie

Il est intéressant de pouvoir traiter des conditions aux limites plus générales, par exemple fixées ou libres (un cas particulièrement bien connu est celui de la corde ouverte). Considérons pour commencer (suivant [5]) un système invariant conforme dans le demi-plan supérieur, avec des conditions aux limites sur l'axe réel invariantes par difféomorphisme (les transformations conformes à une dimension). La variation de l'action dans un changement de coordonnées $z \rightarrow z + f(z, \bar{z})$ tel que f soit réelle sur l'axe réel est

$$\delta S = \frac{1}{\pi} \int_{\text{Im } z \geq 0} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{2i} (\bar{\partial} f T_z^{\bar{z}} + \partial \bar{f} T_{\bar{z}}^z)$$

De

$$d(f T_z^{\bar{z}} dz - \bar{f} T_{\bar{z}}^z d\bar{z}) = (\bar{\partial} f T_z^{\bar{z}} + \partial \bar{f} T_{\bar{z}}^z) dz \wedge d\bar{z} + (f \bar{\partial} T_z^{\bar{z}} - \bar{f} \partial T_{\bar{z}}^z) dz \wedge d\bar{z}$$

on déduit

$$\delta S = \frac{1}{\pi} \int_{\text{Im } z \geq 0} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{2i} (f \bar{\partial} T_z^{\bar{z}} - \bar{f} \partial T_{\bar{z}}^z) + \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt F(T_z^{\bar{z}} - T_{\bar{z}}^z)$$

où $F(t) = f(t, t) = \bar{f}(t, t)$. Ceci impose que $\bar{\partial}T_z^z = 0$, $\partial T_z^z = 0$ pour $Im z \geq 0$ et $T_z^z = \bar{T}_z^z$ sur l'axe réel. Les deux fonctions $T(z)$ et $\bar{T}(\bar{z})$, respectivement holomorphe et antiholomorphe dans le demi plan supérieur, coïncident sur l'axe réel. Donc $\bar{T}(z)$ est une fonction holomorphe dans le demi plan inférieur qui prolonge $T(z)$, cette fonction admet en conséquence un prolongement holomorphe dans le plan tout entier. Ceci montre que T et \bar{T} ne sont plus des objets indépendants. Dans le cas quantique on s'attend à ce que tout ceci reste vrai au sens de l'insertion dans les fonctions de corrélation à condition que l'on n'insère pas d'autre champ que T ou \bar{T} sur l'axe réel. Alors le développement en modes donne $L_n = \bar{L}_n$. Par contre la localité impose que les produits à courte distance n'ont pas changé, donc la seule algèbre de Virasoro qui subsiste dans cette géométrie a la même charge centrale que celle qui apparaît dans le plan. En fait on peut reprendre le raisonnement précédent dans le cas où une discontinuité des conditions au bord est présente par exemple à l'origine (c'est à dire qu'on envisage des conditions au bord invariées conformes différentes sur l'axe réel négatif et l'axe réel positif). Ceci amène à des restrictions sur les changements de coordonnées admissibles, et l'apparition de coupures (éventuellement de pôles) dans l'extension au plan tout entier des fonctions de corrélation du tenseur énergie-impulsion.

Considérons maintenant un système sur un rectangle de côtés l_1 et l_2 avec des conditions au bord invariées conformes désignées par α et β sur les cotés de longueur l_2 . Posant

$$\varrho = \frac{i\pi}{l_1}(x + iy)$$

l'application $z = e^\varrho$ transforme le rectangle en une demi-couronne dans le demi-plan supérieur, et la fonction de partition si l'on met des conditions périodiques dans la direction y est

$$Z_{\alpha, \beta} = Tr_{\alpha, \beta} e^{-\pi \frac{l_2}{l_1} \hat{H}}$$

Cette fois le Hamiltonien est simplement $L_0 - c/24$ agissant dans un espace de Hilbert approprié. Dans le cas d'une théorie rationnelle, on s'attend donc à ce que la fonction de partition s'écrive

$$Z_{\alpha, \beta} = \sum_j N_{\alpha, \beta}^j \chi_j(\tau/2)$$

où $\tau = il_2/l_1$ et α, β indexent les conditions aux limites alors que j indexe les caractères. Il n'y a pas de sens ici à mettre une partie réelle à τ car les conditions α et β sont invariées par translation (le long de l_1).

Une fois de plus le champ libre va permettre d'illustrer ces considérations. Prenons pour conditions α (resp β) que le champ φ est astreint à valoir a (resp b) en $x = 0$ (resp $x = l_1$). Dans l'autre direction φ est périodique. On peut alors écrire $\varphi = \varphi_{cl} + \varphi'$ où φ_{cl} est la solution classique des équations du mouvement ($\Delta\varphi_{cl} = 0$) c'est à dire

$$\varphi_{cl}(x, y) = \left(1 - \frac{x}{l_1}\right)a + \frac{x}{l_1}b$$

Alors

$$\int_{(a, b)} \mathcal{D}\varphi e^{-S} = e^{-S_{cl}} \int_{(0, 0)} \mathcal{D}\varphi' e^{-S}$$

Or $S_{cl} = \frac{1}{8\pi} \frac{l_2}{l_1} (b-a)^2$ et les valeurs propres de $\frac{-\Delta}{4\pi}$ sont $\frac{\pi}{l_2^2} |\frac{m}{2}\tau - n|^2$ avec $m > 0$. L'absence de mode zéro fait à nouveau que le préfacteur est sans importance. Le résultat final est (en posant $\alpha = (b-a)/2\pi$)

$$Z_{a,b} = \frac{e^{i\pi\tau(\alpha^2/2-1/24)}}{\prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{i\pi\tau m})}$$

ce qui est exactement le caractère (évalué en $\tau/2$ comme prévu) du module de Verma $V_{1,\alpha^2/2}$ qu'on sait, dans le cas générique où il est irréductible, être associé à l'opérateur de vertex V_α .

4.4 Transformations modulaires des caractères

Comme nous l'avons déjà remarqué, l'action de la transformation $T : \tau \rightarrow \tau + 1$ agit diagonalement sur les caractères, les multipliant par une phase liée au poids conforme de la représentation considérée. L'action de $S : \tau \rightarrow -1/\tau$ est toujours étroitement liée à la transformation de Fourier finie. Nous allons donner des résultats détaillés dans les deux cas dont nous aurons besoin le plus souvent.

- Le cas de l'algèbre de Kač-Moody $su(N)$ ([22])

Au chapitre 3 nous avons donné l'expression des caractères en termes de fonctions théta associées au réseau des racines (c'est à dire de solutions de l'équation de la chaleur). Sous cette forme, il est clair que la transformation de Poisson va permettre de calculer très explicitement l'action de S . Dans notre cas le volume de la maille du réseau des racines est \sqrt{N} et

$$\int_{\text{hyperplan des racines}} e^{2i\pi\mathbf{p}\cdot\mathbf{y} - \pi t\mathbf{y}^2} = t^{\frac{1-N}{2}} e^{-\pi\mathbf{p}^2/t}$$

ce qui implique que

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\text{poids } \mathbf{p}} e^{2i\pi\mathbf{p}\cdot\mathbf{y} - \pi\mathbf{p}^2/t} = t^{\frac{N-1}{2}} \sum_{\text{racines } \mathbf{r}} e^{-\pi t(\mathbf{y}+\mathbf{r})^2}$$

Si l'on pose

$$\tau = \frac{it}{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\tau} + \frac{\mathbf{p}}{n}$$

où \mathbf{p} est un poids quelconque, on peut faire un prolongement analytique au demi-plan $\text{Im } \tau > 0$ et l'identité précédente devient

$$\Theta_{n,\mathbf{p}}(\mathbf{x}, \tau) = (i/\tau)^{\frac{N-1}{2}} (Nn^{N-1})^{-\frac{1}{2}} e^{\left(-\frac{n\mathbf{x}^2}{2\tau}\right)} \sum_{\text{poids } \mathbf{q}} e^{\left(-\frac{\mathbf{q}^2}{2n\tau} + \mathbf{q} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}}{\tau} + \frac{\mathbf{p}}{n}\right)\right)}$$

Comme nous l'avons déjà remarqué, $\Theta_{n,\mathbf{p}}$ ne dépend de \mathbf{p} que par sa classe modulo nM , et comme M^* est un produit semi-direct de nM et de M^*/nM on peut décomposer la somme sur les poids en écrivant \mathbf{q} comme somme d'un représentant d'une classe résiduelle et d'un élément de nM . On obtient alors

$$\Theta_{n,\mathbf{p}}(\mathbf{x}, \tau) = (i/\tau)^{\frac{N-1}{2}} (Nn^{N-1})^{-\frac{1}{2}} e^{\left(-\frac{n\mathbf{x}^2}{2\tau}\right)} \sum_{\text{classes résiduelles } \mathbf{p}' } e^{\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}'}{n}\right)} \Theta_{n,\mathbf{p}'}\left(\frac{\mathbf{x}}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)$$

formule dans laquelle, à nouveau, seules les classes des poids interviennent. Les opérations du groupe de Weyl sont des isométries, donc la relation (3.3) montre que les fonctions $\hat{\Theta}$ vérifient la même identité. Mais alors dans le second membre toutes les fonctions ne sont plus linéairement indépendantes, on peut replier la somme dans B_n et ce réarrangement donne

$$\hat{\Theta}_{n,\mathbf{p}}(\mathbf{x}, \tau) = (i/\tau)^{\frac{N-1}{2}} (Nn^{N-1})^{-\frac{1}{2}} e\left(-\frac{n\mathbf{x}^2}{2\tau}\right) \sum_{\mathbf{p}' \in B_n} \left(\sum_{w \in W} \epsilon(w) e\left(\frac{\mathbf{p} \cdot w \mathbf{p}'}{n}\right) \right) \hat{\Theta}_{n,\mathbf{p}'}\left(\frac{\mathbf{x}}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)$$

On peut appliquer ceci au niveau 0 ($n = N$), et comme B_N se réduit à \mathbf{p}_0 on vérifie instantanément que

$$N^{-\frac{N}{2}} \sum_{w \in W} \epsilon(w) e\left(\frac{\mathbf{p}_0 \cdot w \mathbf{p}_0}{N}\right)$$

est une racine quatrième de l'unité. Plus précisément on peut voir cette expression comme un déterminant $N \times N$ lié à celui de la transformation de Fourier finie

$$\det \left[N^{-\frac{1}{2}} e\left(\frac{1}{N} \left(\frac{N+1}{2} - a\right) \left(\frac{N+1}{2} - b\right)\right) \right]_{a,b}$$

Les sommes de Gauss permettent de montrer que le spectre de la transformation de Fourier finie est la troncation à l'ordre N de la suite

$$1, -1, i, 1, -i, -1, i, 1, -i, -1, i, 1, -i, \dots$$

et finalement

$$N^{-\frac{N}{2}} \sum_{w \in W} \epsilon(w) e\left(\frac{\mathbf{p}_0 \cdot w \mathbf{p}_0}{N}\right) = i^{\frac{N(N-1)}{2}}$$

Ceci permet enfin d'obtenir la loi de transformation des caractères

$$\chi_{n,\mathbf{p}}(\mathbf{x}, \tau) = (-i)^{\frac{N(N-1)}{2}} (Nn^{N-1})^{-\frac{1}{2}} e\left(-\frac{n\mathbf{x}^2}{2\tau}\right) \sum_{\mathbf{p}' \in B_n} \left(\sum_{w \in W} \epsilon(w) e\left(\frac{\mathbf{p} \cdot w \mathbf{p}'}{n}\right) \right) \chi_{n,\mathbf{p}'}\left(\frac{\mathbf{x}}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)$$

Comme nous l'avons déjà mentionné, les caractères spécialisés ne sont pas linéairement indépendants à cause de la conjugaison (notée C), néanmoins nous vérifions sur cet exemple que la considération des caractères complets permet de définir de façon univoque des matrices S et T indexées par les champs primaires de l'algèbre étendue. L'utilisation des sommes de Gauss sur les fonctions théta non antisymétrisées permet de s'assurer que

$$S^2 = C \quad C^2 = I \quad ST^3 = I$$

avec

$$S_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} = (-i)^{\frac{N(N-1)}{2}} (Nn^{N-1})^{-\frac{1}{2}} \sum_{w \in W} \epsilon(w) e\left(-\frac{\mathbf{p} \cdot w \mathbf{p}'}{n}\right)$$

et

$$T_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} = e\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2n} - \frac{\mathbf{p}_0^2}{2N}\right)$$

- Le cas des modèles minimaux de l'algèbre de Virasoro ([7])

Les caractères de l'algèbre de Virasoro sont aussi des généralisations de fonctions théta usuelles, et il n'est pas étonnant qu'ils possèdent aussi des propriétés modulaires remarquables. Nous allons simplement écrire la matrice S en remarquant qu'une manière alternative de la calculer serait d'utiliser les résultats du paragraphe précédent en considérant les modèles minimaux comme des quotients de $su(2)$ comme on le montrera au chapitre suivant.

On se souvient que pour $c = 1 - \frac{6}{m(m+1)}$ les caractères sont indexés par deux entiers r et s tels que $1 \leq s \leq r \leq m - 1$ et la matrice S est la suivante

$$S_{r,s}^{r',s'} = \left(\frac{1}{8m(m+1)} \right)^{1/2} (-1)^{(r+s)(r'+s')} \sin \frac{\pi r r'}{m} \sin \frac{\pi s s'}{m+1}$$

4.5 Conditions aux limites et algèbre de Verlinde

Nous allons maintenant mettre en évidence une structure intéressante des conditions aux limites dans les théories conformes. Elle donne une interprétation intuitive des résultats de Verlinde (voir [47] et [32]) sur les règles de fusion. Le désavantage de cette approche est qu'elle n'est pas parfaitement rigoureuse (au moins de la manière dont je la comprends). Quoiqu'elle s'applique de façon plus générale, nous allons la décrire en détail seulement dans le cas de modèles tels que les caractères restreints (c'est à dire comptant uniquement les dimensions des sous-espaces propres de L_0) soient linéairement indépendants (par exemple les modèles minimaux, ou les modèles de Wess Zumino Witten $su(2)$ unitaires). Ils permettent un traitement plus élémentaire car les caractères déterminent alors univoquement la matrice S , ce qui n'est pas le cas dans les théories où des représentations conjuguées inéquivalentes existent et ont même caractère restreint. Par souci de simplicité certaines preuves seront données uniquement dans le cas des modèles minimaux où l'algèbre chirale se réduit à l'algèbre de Virasoro. Bien que la plupart des calculs aient été faits de façon indépendante, nous suivons largement la jolie présentation de Cardy ([4])

Nous supposons donc que nous étudions une théorie conforme unitaire rationnelle (les charges centrales sont fixées, rationnelles ainsi que les poids conformes) dont les caractères restreints sont linéairement indépendants. Supposons un instant que nous ignorions tout des transformations modulaires de ces caractères, mais que nous ayons pu calculer la fonction de partition sur le tore (invariante modulaire) et que sa valeur soit la forme diagonale

$$Z = \sum_j |\chi_j(q)|^2$$

Il est assez remarquable que ce seul fait implique que les caractères portent une représentation linéaire unitaire du groupe modulaire (l'argument est habituellement présenté dans la direction opposée). La preuve est la suivante: les caractères sont des fonctions holomorphes (d'une variable qui est une racine convenable de q) dans le disque unité pointé. Agissant sur l'ensemble des fonctions de cette variable les transformations modulaires sont linéaires. Mais la fonction de partition est une forme bilinéaire des fonctions de q et \bar{q} , donc de manière un peu pédante un

élément du produit tensoriel des fonctions de q et \bar{q} . Si on complète les caractères en une base des fonctions de q , la transformée modulaire d'un caractère ne peut avoir de composantes hors de l'espace des caractères car une telle composante subsisterait dans le produit tensoriel donnant Z , contredisant son invariance. Donc l'espace des caractères se transforme linéairement. Mais alors l'invariance de Z montre que les matrices représentant le groupe modulaire sont unitaires. En conséquence l'invariance de Z fait que l'espace des caractères est muni naturellement d'un produit scalaire faisant d'eux les éléments d'une base orthonormée. La matrice S vérifie $SS^\dagger = \mathbf{1}$ et $S^2 = C = \mathbf{1}$ ce qui confirme que les représentations sont auto-conjuguées. Si l'on restreint τ à être imaginaire pur les caractères restent linéairement indépendants (car ils sont holomorphes) et deviennent réels. La transformation S continue à agir, ce qui prouve que ces coefficients sont réels, donc que la matrice S est symétrique.

Nous allons maintenant prouver dans le cas particulier de l'algèbre de Virasoro le résultat général suivant: les vecteurs de l'espace de Hilbert décrivant les conditions aux limites respectant les symétries de l'algèbre chirale sont en correspondance biunivoque avec les champs primaires de la théorie, ou, ce qui revient au même, avec les caractères.

Pour trouver dans l'espace de Hilbert \mathcal{H}_P les états décrivant des conditions au bord invariantes conformes il faut trouver les combinaisons linéaires des générateurs des algèbres de Virasoro droite et gauche qui agissent uniquement dans la direction spatiale (c'est à dire à rayon constant en quantification radiale). Choissant 0 comme temps de quantification il est facile de déduire de (3.2) que ces combinaisons sont de la forme

$$(4.4) \quad L_n - \bar{L}_{-n}$$

qui agissent sur un champ primaire $\phi(\varrho, \bar{\varrho})$ comme

$$e^{in\sigma} \left(-2i \frac{\partial}{\partial \sigma} + (h + \bar{h})n \right)$$

c'est à dire engendrent l'action des difféomorphismes du cercle sur les $(h + \bar{h})$ formes.

Nous cherchons donc les vecteurs de \mathcal{H}_P annihilés par tous les opérateurs de la forme (4.4). En fait pour des raisons techniques il est nécessaire de considérer des espaces un peu différents de ceux que nous avons utilisés jusqu'à présent (car les états décrivant les conditions au bord sont analogues aux états d'impulsion définie de la mécanique quantique et ne sont pas en particulier de carré sommable). Nous étions partis d'espaces de représentations algébriques, sommes directes algébriques des sous-espaces de décomposition de L_0 . La forme contragrédiente étant définie positive nous pouvions considérer la complétion Hilbertienne de ces espaces, et ce sont ces complétés que nous utilisons implicitement quand nous parlons de théorie des champs. Nous avons maintenant besoin d'un troisième type d'espace que l'on peut définir de plusieurs manières. Si

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n$$

est la décomposition suivant la graduation L_0 on définit

$$\tilde{\mathcal{E}} = \prod_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n$$

produit direct algébrique. C'est le complété de \mathcal{E} pour la topologie de la valuation (c'est à dire que, dans \mathcal{E} on choisit les sous-espaces $\bigoplus_{n \geq p} \mathcal{E}_p$ comme système fondamental de voisinages de l'origine et qu'on complète suivant cette topologie). Mais la forme contragrédiente permet aussi de l'identifier canoniquement comme le dual algébrique de \mathcal{E} . Il est clair que $\tilde{\mathcal{E}}$ reste un espace de représentation de l'algèbre de Virasoro, dans lequel \mathcal{E} (plus précisément son image par l'inclusion canonique) forme un sous espace invariant.

Cherchons donc dans $\tilde{\mathcal{H}}_i \otimes \tilde{\mathcal{H}}_{\bar{i}}$ (où i et \bar{i} sont deux représentations de Vir) les vecteurs annihilés par tous les opérateurs $L_n - \bar{L}_{-n}$.

Le lemme fondamental est le suivant: l'intersection des noyaux de L_1 et L_2 agissant sur $\tilde{\mathcal{H}}_i \otimes \tilde{\mathcal{H}}_{\bar{i}}$ est $vect(|h_i \rangle) \otimes \tilde{\mathcal{H}}_{\bar{i}}$ (où $vect(|h_i \rangle)$ est la droite vectorielle engendrée par $|h_i \rangle$). En effet les opérateurs L_n (en particulier L_1 et L_2) n'agissent que sur la représentation gauche i et dans celle ci, ils ne mélangent pas les sous-espaces de graduations différentes, donc s'ils annihilent un vecteur du produit tensoriel ils annihilent en fait toutes ses composantes (i, p) (composantes de degré p dans la représentation i), donc la seule composante non nulle est celle avec $p = 0$ car la représentation i est irréductible (rappelons que par commutation L_1 et L_2 engendrent tous les L_n , n positif).

Ecrivons maintenant un élément du produit tensoriel sous la forme d'une suite double

$$(|p, \bar{p} \rangle)_{p, \bar{p}} \text{ où les composantes sont dans } \mathcal{H}_{i, p} \otimes \mathcal{H}_{\bar{i}, \bar{p}}$$

En écrivant qu'il est dans le noyau de $L_n - \bar{L}_{-n}$, ($n = 1, 2$) on obtient le système suivant

$$\begin{aligned} L_1 |p, 0 \rangle &= 0 & p &\geq 0 \\ L_1 |p+1, \bar{p} \rangle &= L_{-1} |p, \bar{p}-1 \rangle & p &\geq 0, \bar{p} \geq 1 \\ L_2 |p, 0 \rangle &= 0 & p &\geq 0 \\ L_2 |p, 1 \rangle &= 0 & p &\geq 0 \\ L_2 |p+2, \bar{p} \rangle &= L_{-2} |p, \bar{p}-2 \rangle & p &\geq 0, \bar{p} \geq 2 \end{aligned}$$

Utilisant le lemme précédent, on vérifie par récurrence que ces contraintes entraînent que

$$|p, \bar{p} \rangle = 0 \text{ dès que } p \geq \bar{p} + 1$$

Bien sur les contraintes sont symétriques dans l'échange des parties droite et gauche donc

$$|p, \bar{p} \rangle = 0 \text{ dès que } p \neq \bar{p}$$

Notons encore que si $|0, 0 \rangle = 0$ alors toutes les autres composantes sont nulles, donc les vecteurs qui satisfont les conditions forment un espace de dimension au plus 1. Enfin on remarque que si $|0, 0 \rangle \neq 0$ l'action de $L_0 - \bar{L}_0$ donne $h_i = h_{\bar{i}}$. En utilisant explicitement les expressions des poids pour les modèles minimaux unitaires, on vérifie qu'il n'y a pas de dégénérescences et que $i = \bar{i}$. Dans ce cas \bar{L}_{-n} est simplement l'adjoint de L_n (plus correctement L_n devrait s'écrire $L_n \otimes Id$ et $\bar{L}_{-n} Id \otimes L_n$), et on sait construire canoniquement un vecteur qui satisfait aux conditions d'invariance requises: $\mathcal{L}(\mathcal{H}_i, \tilde{\mathcal{H}}_i)$ espace des applications linéaires de \mathcal{H}_i dans $\tilde{\mathcal{H}}_i$ est canoniquement isomorphe à $\tilde{\mathcal{H}}_i \otimes \tilde{\mathcal{H}}_i$ (on montre sans peine que l'application bilinéaire de $\tilde{\mathcal{H}}_i \times \tilde{\mathcal{H}}_i$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_i, \tilde{\mathcal{H}}_i)$ définie par $(\tilde{y}, \tilde{z})(x) = \langle y|x \rangle z$ se relève en une bijection notée Γ dans le produit tensoriel). L'image réciproque de l'injection canonique est justement le vecteur recherché, noté

$|i \otimes i \rangle$. En effet si les vecteurs $|p, \alpha \rangle$ forment une base orthonormée de \mathcal{H}_i le vecteur $|i \otimes i \rangle$ s'écrit $(\sum_{\alpha} |p, \alpha \rangle \otimes |p, \alpha \rangle)_p$ et $(L_n - \bar{L}_{-n})|i \otimes i \rangle$ est dans le noyau de Γ donc nul.

Cette assez longue digression technique montre le résultat important suivant: les espaces $\tilde{\mathcal{H}}_i \otimes \tilde{\mathcal{H}}_{\bar{i}}$ contiennent $\delta_{i,\bar{i}}$ états représentant des conditions au bord invariants conformes. En particulier dans la théorie diagonale les états invariants conformes sont en correspondance biunivoque avec les champs primaires de la théorie. Ceci se généralise aux autres algèbres chirales.

Considérons alors les conditions au bord les plus générales invariants sous l'algèbre chirale donc de la forme $|\alpha \rangle = \sum_i \Lambda_{\alpha}^i |i \otimes i \rangle$. Comme nous l'avons déjà remarqué plus haut, on s'attend à ce que la fonction de partition obtenue en prenant l'élément de matrice de l'opérateur d'évolution entre deux tels états α et β donne dans la transformation S une combinaison linéaire à coefficients entiers de caractères

$$Z_{\alpha,\beta} = \sum_j N_{\alpha,\beta}^j \chi_j$$

L'apparition de caractères vient directement de la structure des états invariants conformes, qui vérifient

$$\langle j \otimes j | q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{c}{24}} |i \otimes i \rangle = \chi_i(2i \operatorname{Im} \tau) \delta_{i,j}$$

On constate alors que les coefficients $N_{\alpha,\beta}^j$ valent $\sum_i \Lambda_{\alpha}^i \overline{\Lambda_{\beta}^i} S_i^j$. Il est bien clair que les coefficients N ne peuvent pas être entiers pour des valeurs arbitraires des coefficients Λ . Nous allons voir qu'il existe un choix naturel de la matrice Λ pour lequel les coefficients N sont bien des entiers.

Revenant au cas des modèles minimaux, on peut faire la remarque suivante: dans $\tilde{\mathcal{H}}_i \otimes \tilde{\mathcal{H}}_{\bar{i}}$ la composante de plus bas degré du vecteur $|i \otimes i \rangle$ est simplement l'état créé par application du champ primaire ϕ_i sur le vide de la théorie, c'est à dire l'insertion de ϕ_i à l'origine. On peut alors interpréter $|i \otimes i \rangle$ comme une forme d'insertion de ϕ_i le long du cercle unité, qui a plus de structure qu'un point. Si l'on applique l'opérateur d'évolution à $|i \otimes i \rangle$ pour $\operatorname{Im} \tau \rightarrow \infty$ (c'est à dire si l'on contracte le cercle unité sur l'origine) on retrouve à un facteur multiplicatif près l'insertion de ϕ_i en 0. Dans cette optique,

$$(4.5) \quad \langle i \otimes i | q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{c}{24}} |j \otimes j \rangle$$

est lié lorsque $\operatorname{Im} \tau \rightarrow \infty$ à la fonction à deux points $\langle \phi_i(z, \bar{z}) \phi_j(z', \bar{z}') \rangle$ quand z tend vers 0 et z' vers l'infini. On sait que ceci définit un produit scalaire entre champs primaires qui coïncide ici avec celui défini sur les caractères. Mais d'un autre côté, on vérifie immédiatement que par construction (4.5) vaut $\chi_i(2i \operatorname{Im} \tau) \delta_{i,j}$ soit encore $S_i^k \chi_k(i/2 \operatorname{Im} \tau) \delta_{i,j}$. Remarquons que le caractère dominant lorsque son argument tend vers l'infini est χ_0 , le caractère du vide, et comme les caractères sont réels positifs lorsque leur argument est imaginaire pur forcément S_i^0 est positif ou nul. La matrice S est inversible, donc la colonne d'indice 0 n'est pas identiquement nulle, et il y a au moins un i pour lequel le terme dominant de la dernière expression est $S_i^0 e^{\pi \operatorname{Im} \tau c/24} \delta_{i,j}$. Donc les vecteurs décrivant les conditions au bord invariants conformes sont eux aussi munis d'un produit scalaire très naturel

$$\langle i \otimes i | j \otimes j \rangle = S_i^0 \delta_{i,j}$$

Du fait du lien avec les fonctions de corrélation il serait étonnant que ce produit scalaire soit dégénéré, ce qui indique qu'en fait les nombres S_i^0 sont strictement positifs (bien sûr dans le cas

de l'algèbre de Virasoro ceci se vérifie trivialement à partir de la forme explicite de la matrice S , mais nous avons ici une indication d'ordre plus général), et les vecteurs

$$\frac{1}{\sqrt{S_i^0}} |i \otimes i \rangle$$

forment une base orthonormée de l'espace des conditions au bord invariante conforme. On peut montrer qu'une structure analogue existe pour une algèbre chirale quelconque. On dispose donc en général de trois espaces vectoriels euclidiens naturellement isomorphes: les champs primaires, les caractères et les conditions au bord (dans la direction temporelle, c'est à dire des vecteurs de l'espace de Hilbert avec conditions aux limites périodiques dans la direction spatiale). Du fait de ces isomorphismes il est naturel que dans une transformation modulaire les conditions au bord s'échangent avec la même loi de transformation que les caractères, ce qui revient à dire que α et i peuvent être choisis de manière naturelle dans le même ensemble d'indices et que $\Lambda_i^j = S_i^j / S_j^0$. Alors les coefficients $N_{i,j}^k$ sont ceux de l'algèbre de Verlinde

$$N_{i,j}^k = \sum_l \frac{S_i^l S_j^l S_l^k}{S_l^0}$$

Répetons-le, ceci ne prétend pas être une démonstration des formules de Verlinde. Néanmoins nous trouvons suggestif de voir ressurgir cette algèbre dans un contexte un peu différent du contexte habituel et d'interpréter les coefficients $N_{i,j}^k$ comme des multiplicités d'apparition de la représentation k dans l'espace de Hilbert associé au choix de conditions au bord i et j .

Revenant maintenant spécifiquement à l'algèbre de Virasoro, nous allons voir qu'il existe d'autres conditions au bord intéressantes. Elles apparaissent à cause de la structure factorisée en r, s (la paire d'entiers qui indexent les caractères) de la matrice S . Elles permettent d'établir un lien précis entre certaines fonctions de partition d'une théorie conforme avec conditions au bord fixées et certaines probabilités locales de hauteur de modèles intégrables dont le point critique est décrit par cette théorie conforme. Ces résultats font apparaître une relation entre le paramètre τ décrivant la géométrie finie dans laquelle on considère le modèle conforme et l'écart au point critique dans la paramétrisation elliptique du modèle intégrable. L'article 1 contient de nombreuses vérifications analytiques ou numériques de ces relations, et nous allons nous contenter ici de montrer que les conditions au bord permettant de calculer les probabilités locales de hauteur dans ces modèles s'interprètent naturellement en termes de r et s . Disons quelques mots de ces modèles intégrables. Ils sont associés à des graphes non orientés (sur lesquels nous aurons l'occasion de revenir plus tard) de la manière suivante. En chaque site une variable prend ses valeurs sur les sommets d'un graphe, avec la contrainte que les variables en deux sites voisins sur le réseau prennent des valeurs voisines sur le graphe (c'est à dire liées par un arête). Aux configurations possibles sur une facette du réseau sont associés des poids de Boltzmann, et si ceux ci sont (très) habilement choisis, ils vérifieront une relation de Yang Baxter assurant l'existence d'une infinité de matrices de transfert commutant entre elles, et finalement l'intégrabilité du modèle. Le fait d'imposer que le modèle ait un point critique du second ordre réduit drastiquement les graphes admissibles. Pour notre propos, il nous suffit de savoir qu'une chaîne linéaire de m points (numérotés de 1 à m) est un graphe admissible ($m = 3$ donne le modèle d'Ising usuel) associé à la théorie diagonale des théories minimales unitaires

$c = 1 - \frac{6}{m(m+1)}$. Les probabilités locales de hauteur sont associées aux fonctions de partition suivantes: on découpe dans le réseau carré usuel un grand carré orienté à 45° par rapport au réseau et centré à l'origine. La frontière ressemble à quatre portions d'escalier, et en chaque site de celle ci on choisit alternativement des points b et c voisins sur le graphe (on pose $d = \inf(b, c)$); à l'origine on fixe la valeur à être a . La probabilité locale de hauteur associée est reliée à $\chi_{d,a}$ comme nous le montrons dans l'article 1. Remarquons que a peut varier jusqu'à m , et que si $a > d$ il faut replier dans le domaine fondamental de la table de Kač (c'est à dire changer a en $m+1-a$ et d en $m-d$) pour obtenir l'indexation usuelle des caractères. Tout ceci indique qu'il doit exister deux types de conditions au bord indépendantes (r et s) dans la théorie conforme. Le type s est facile à concevoir car son image sur le réseau est claire: il correspond à fixer les hauteurs le long des portions d'escalier. Quand au type r il semblerait correspondre à un bord constitué d'un spin unique ce qui n'est pas très intuitif. Nous allons cependant reconnaître ces deux types de conditions au bord dans la théorie conforme. Nous pouvons écrire la matrice S sous une forme factorisée

$$S_{r,s}^{r',s'} = \left(\frac{1}{8m(m+1)} \right)^{1/2} (-1)^{(r+s)(r'+s')} \sin \frac{\pi r r'}{m} \sin \frac{\pi s s'}{m+1} = A_r^{r',s'} B_s^{r',s'}$$

avec (bien entendu les normalisations individuelles de A et B n'ont pas de sens particulier)

$$A_r^{r',s'} = \left(\frac{1}{8m(m+1)} \right)^{1/4} (-1)^{r(r'+s')} \sin \frac{\pi r r'}{m}$$

et

$$B_s^{r',s'} = \left(\frac{1}{8m(m+1)} \right)^{1/4} (-1)^{s(r'+s')} \sin \frac{\pi s s'}{m+1}$$

En appliquant A et B aux vecteurs fondamentaux dont nous avons vu qu'ils décrivaient les conditions au bord invariants conformes on obtient des vecteurs du type r ou s cherché

$$|r\rangle = \sum_{(r',s')} A_r^{r',s'} |(r',s')\rangle \otimes (r',s') \rangle \quad |s\rangle = \sum_{(r',s')} B_s^{r',s'} |(r',s')\rangle \otimes (r',s') \rangle$$

Alors en effectuant la transformation correspondant à S sur la quantité

$$\langle r | q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{c}{24}} | s \rangle$$

on obtient $\chi_{r,s}$. Les conditions de bord r et s sont bien indépendantes les unes des autres, et l'espace de Hilbert associé est tout simplement la représentation (r, s) de l'algèbre de Virasoro. Terminons par une remarque. L'existence de ces conditions au bord, intimement reliée à la factorisation de la matrice S , peut comme nous le verrons au chapitre suivant s'interpréter comme une conséquence de la structure quotient des modèles minimaux. Nous ne savons pas si ce lien joue un rôle dans l'étude des conditions au bord d'autres modèles.

Chapter 5

Plongements conformes et dualité

Quels que soient les objectifs poursuivis, qu'il s'agisse de classifier toutes les théories conformes (au moins rationnelles), ou simplement d'enrichir notre compréhension de ces théories en essayant de comprendre quelles sont leurs caractéristiques générales, il est très utile de disposer d'un grand nombre d'exemples (aussi variés que possible) de réalisations de l'invariance conforme. La construction 'quotient' (en anglais coset construction) due à Goddard, Kent et Olive est une méthode systématique très importante permettant de construire de nouvelles théories conformes et de nouvelles algèbres chirales à partir de modèles déjà connus. Nous allons la décrire brièvement dans le but d'introduire les notions fondamentales utilisées dans les articles 3 et 4 qui étudient la dualité entre $su(m)_n$ et $su(n)_m$. En passant nous aurons l'occasion d'appliquer bon nombre de résultats obtenus dans les chapitres précédents.

5.1 La construction quotient abstraite

Le qualificatif d'abstraite vient du fait que cette présentation (voir [51]) formalise dans un cadre général la construction que Goddard, Kent et Olive (voir [16]) avaient appliquée au cas particulier des algèbres de Kač-Moody. C'est l'exemple que nous gardons en mémoire en rédigeant ce paragraphe, car c'est celui qui est utilisé le plus souvent.

Plaçons-nous dans le cadre général des modèles invariants conformes dans le plan contenant une algèbre chirale, éventuellement maximale, dont nous étudierons la composante holomorphe \mathcal{A} . Supposons que cette algèbre chirale contient une sous algèbre \mathcal{B} (en particulier fermée pour le développement en produits d'opérateurs). Parmi les champs chiraux de \mathcal{A} nous pouvons considérer la sous famille notée \mathcal{A}/\mathcal{B} formée des champs de \mathcal{A} qui n'ont pas de singularités à courte distance avec les champs de \mathcal{B} . Nous avons vu que cette propriété équivaut au niveau quantique à la commutation des opérateurs correspondants ou encore à la factorisation des fonctions de corrélation des champs de ces deux familles:

$$\langle B_1(z_1) \dots B_m(z_m) C_1(\xi_1) \dots C_n(\xi_n) \rangle = \langle B_1(z_1) \dots B_m(z_m) \rangle \langle C_1(\xi_1) \dots C_n(\xi_n) \rangle$$

Sous cette forme il est clair que les champs obtenus dans un développement à courte distance de champs de \mathcal{A}/\mathcal{B} sont encore dans \mathcal{A}/\mathcal{B} , et cette propriété nous permet de considérer \mathcal{A}/\mathcal{B} comme une nouvelle algèbre chirale.

Dans le cas des algèbres de courants nous avons observé le fait suivant: à une théorie contenant une telle algèbre est naturellement associé un tenseur énergie-impulsion construit uniquement en termes des générateurs de l'algèbre. Si nous supposons que la même situation se produit ici pour nos algèbres \mathcal{A} et \mathcal{B} nous disposons de deux tenseurs énergie-impulsion $T_{\mathcal{A}}$ et $T_{\mathcal{B}}$ de charges centrales respectives $c_{\mathcal{A}}$ et $c_{\mathcal{B}}$. L'observation importante est que $T_{\mathcal{A}} - T_{\mathcal{B}}$ est dans l'algèbre quotient et peut être interprété comme son tenseur énergie-impulsion.

L'argument est le suivant: les singularités à courte distance d'un champ primaire pour les transformations conformes avec un tenseur énergie-impulsion ont une forme universelle indépendante du tenseur énergie-impulsion. En particulier pour les champs de \mathcal{B} on a

$$T_{\mathcal{A}}(z)B(z') = \frac{h}{(z-z')^2}B(z') + \frac{1}{z-z'}\partial B(z') + \text{partie régulière}$$

et

$$T_{\mathcal{B}}(z)B(z') = \frac{h}{(z-z')^2}B(z') + \frac{1}{z-z'}\partial B(z') + \text{partie régulière}$$

avec le même poids h . Donc $T_{\mathcal{A}} - T_{\mathcal{B}}$ n'a pas de singularités à courte distance avec les champs de \mathcal{B} , donc est dans \mathcal{A}/\mathcal{B} , mais comme $T_{\mathcal{B}}$ est construit à partir des champs de \mathcal{B} , il n'a pas de singularités à courte distance avec les champs de \mathcal{A}/\mathcal{B} . Donc $T_{\mathcal{A}} - T_{\mathcal{B}}$ a les mêmes singularités à courte distance avec les champs de \mathcal{A}/\mathcal{B} que $T_{\mathcal{A}}$. On peut donc l'interpréter comme le tenseur énergie-impulsion pour l'algèbre quotient \mathcal{A}/\mathcal{B} et le noter $T_{\mathcal{A}/\mathcal{B}}$. Décomposant alors $T_{\mathcal{A}}$ sous la forme $T_{\mathcal{B}} + T_{\mathcal{A}/\mathcal{B}}$ on vérifie que $T_{\mathcal{A}/\mathcal{B}}$ porte une représentation de charge centrale $c_{\mathcal{A}} - c_{\mathcal{B}} = c_{\mathcal{A}/\mathcal{B}}$ de l'algèbre de Virasoro.

Il est clair de plus que si la représentation de départ de \mathcal{A} était unitaire, les représentations de \mathcal{A}/\mathcal{B} qu'elle contient sont aussi unitaires. Du fait que les opérateurs de \mathcal{A}/\mathcal{B} et \mathcal{B} commutent entre eux, ceux de l'une servent d'entrelaceurs pour la représentation que l'espace de départ porte de l'autre. En conséquence la décomposition de cet espace est une somme directe de produits tensoriels dont chaque facteur porte une représentation d'une des sous algèbres chirales. Plaçons-nous dans le cas où les théories \mathcal{A} et \mathcal{B} sont rationnelles unitaires et indexons respectivement par des majuscules et des minuscules les espaces de représentation irréductibles associés. Alors on peut définir des espaces de représentation pour \mathcal{A}/\mathcal{B} par

$$\mathcal{H}_I = \sum_i \mathcal{H}_I^i \otimes \mathcal{H}_i$$

A priori il n'est pas évident (en fait c'est en général faux) que les espaces \mathcal{H}_I^i soient irréductibles ou deux à deux non équivalents. En choisissant dans \mathcal{B} et \mathcal{A}/\mathcal{B} une famille maximale de générateurs autoadjoints qui commutent on peut calculer des caractères formels pour toutes ces représentations.

On remarque le petit résultat suivant: si les caractères spécialisés de façon à compter les espaces propres de degré donné (c'est à dire restreint à L_0) sont bien définis pour toutes les représentations de \mathcal{A} et \mathcal{B} (c'est à dire qu'à chaque degré il n'y a qu'un nombre fini d'états) ils le sont aussi pour celles de \mathcal{A}/\mathcal{B} définies par les décompositions ci-dessus (il suffit de voir que toute dimension est positive, ce qui exclut toute compensation); de même si ces caractères spécialisés sont analytiques dans le disque unité pointé pour toutes les représentations \mathcal{A} et \mathcal{B} , ils le sont aussi pour celles de \mathcal{A}/\mathcal{B} définies par les décompositions ci dessus (cette fois on se

place sur l'intervalle $[0,1]$ pour obtenir des majorations termes à termes très simples car toutes les séries sont à coefficients positifs).

On peut alors écrire

$$\chi_I(q) = \sum_i \Gamma_I^i(q) \chi_i(q)$$

et les fonctions dites de branchement Γ ont des propriétés modulaires très simples en fonction de celles des caractères de \mathcal{A} et \mathcal{B} . On vérifie sans peine que le groupe modulaire agit sur l'indice I avec la représentation portée par les χ_I et sur l'indice i avec la représentation conjuguée (c'est à dire faite des matrices complexes conjuguées) de celle portée par les χ_i (on a utilisé ${}^t S^{-1} = \bar{S}$). Ceci ne suffit pas toujours à déterminer les transformations modulaires des Γ car il peut arriver que certaines fonctions de branchement soient identiquement nulles. Mis à part cette subtilité, dans les cas favorables le commutant pour la théorie quotient est le produit tensoriel des commutants, mais hélas ceci implique seulement que le produit tensoriel des commutants sur \mathbf{Z} est inclus dans le commutant sur \mathbf{Z} de la théorie quotient.

5.2 Plongements conformes

Un cas particulièrement intéressant (dit de plongement conforme) est celui où les charges centrales de \mathcal{A} et \mathcal{B} sont égales dans une théorie unitaire (on consultera [42] pour la classification des plongements conformes dans le cas des algèbres de Kač-Moody). On montre en effet le théorème suivant: l'algèbre de Virasoro à charge centrale nulle n'a qu'une représentation unitaire de plus haut poids, la représentation triviale (qui correspond à $h = 0$). Ceci résulte bien sûr du calcul du déterminant de la forme contragrédiente, mais une preuve directe est simple et nous allons la donner. Insistons tout de suite sur la portée de ce résultat qui explique que toute les théories conformes unitaires non triviales doivent contenir des anomalies (par exemple dans une algèbre de Kač-Moody si $k = 0$ alors $c = 0!$).

Venons-en à la preuve et considérons donc une représentation unitaire irréductible de plus haut poids h de charge centrale nulle de l'algèbre de Virasoro, notons $|h\rangle$ le vecteur cyclique et pour $n > 0$ fixé calculons la restriction de la forme contragrédiente à l'espace engendré par $L_{-n}^2|h\rangle$ et $L_{-2n}|h\rangle$. On obtient la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 4n^2h(n+2h) & 6n^2h \\ 6n^2h & 4nh \end{pmatrix}$$

dont le déterminant vaut $-4n^3h^2(9n^2 - 4n - 8h)$ qui devient négatif pour n assez grand sauf si $h = 0$. Mais alors nous voyons que $L_{-n}^2|h\rangle$ a une norme nulle pour tout n , ce qui signifie que tous les opérateurs agissent trivialement sur $|h\rangle$, ce qui donne le résultat recherché.

Il suffit alors d'appliquer le petit lemme du paragraphe précédent pour conclure que si les caractères formels spécialisés existent pour \mathcal{A} et \mathcal{B} alors les fonctions de branchement sont simplement des entiers positifs ou nuls (et non plus des fonctions) qui portent alors le nom de coefficients de branchement. Dans le cas où les transformations modulaires sont bien définies on vérifie immédiatement que les coefficients de branchement forment un entrelaceur entre les actions du groupe modulaire sur \mathcal{A} et \mathcal{B} (ce résultat ne dépend pas de l'unitarité de la représentation du groupe modulaire). On pourrait se proposer de calculer tous ces entrelaceurs et pas seulement

celui réalisé par le plongement conforme considéré. Ce problème est, comme on le voit, très semblable à la classification des invariants modulaires, ceci étant encore plus net si l'on cherche des invariants modulaires pour une théorie où les algèbres chirales gauche et droite diffèrent. Notons finalement que dans un plongement conforme on a automatiquement un plongement des composante de degré zéro associées, ce qui implique que les coefficients de branchement du plongement conforme sont supérieurs ou égaux à ceux du plongement des composantes de degré zéro associées.

Nous allons maintenant présenter quelques applications de la construction quotient.

5.2.1 Les modèles minimaux unitaires

Goddard, Kent et Olive ont remarqué ([16]) que l'algèbre de Kač-Moody $su(2)_{k+1}$ pouvait se réaliser comme la sous algèbre diagonale de $su(2)_k \oplus su(2)_1$ et (c'est en fait le point intéressant) que la charge centrale correspondant au modèle quotient était celle des modèles minimaux. Plus précisément le modèle quotient a pour charge centrale $1 - \frac{6}{(k+2)(k+3)}$ et en posant $m = k + 2$ on retrouve la série habituelle. Partant de représentations unitaires des algèbres de Kač-Moody on est donc assuré d'obtenir des représentations unitaires de l'algèbre de Virasoro dont les caractères sont les fonctions de branchement.

5.2.2 Transformations en bosons libres

Au début du chapitre 1, nous avons mentionné que le champ libre permettait de reformuler de nombreux modèles invariants conformes. La construction quotient va nous fournir des exemples. Nous avons calculé pour $su(N)$ la charge centrale au niveau 1 et nous avons trouvé $N - 1$ (pour une algèbre de Lie simplement lacée quelconque A , D ou E la charge centrale au niveau 1 est en fait le rang de l'algèbre). Si l'on prend comme sous algèbre \mathcal{B} des courants indexés par un tore de Cartan le plongement est conforme, ce qui indique la possibilité de réaliser les représentations des algèbre de Kač-Moody au niveau 1 dans des espaces de Fock de bosons libres ([50]). A chaque courant du tore de Cartan (de l'algèbre de dimension finie) on associe un boson libre et les courants indexés par les racines (toujours de l'algèbre de dimension finie) sont réalisés par des opérateurs de vertex chiraux associés à des champs libres.

5.3 La dualité $su(m)_n \ su(n)_m$

Il est clair que le groupe $SU(m) \times SU(n)$ peut se plonger comme un sous groupe du groupe $SU(mn)$ (de manière non unique): si E_m et E_n sont deux espaces vectoriels de dimensions respectives m et n munis d'une forme sesquilinéaire définie positive il en est naturellement de même des produits tensoriels ayant pour premier facteur E_m ou son dual et pour second facteur E_n ou son dual. Si l'on agit sur chaque facteur avec une transformation unitaire, on obtient évidemment une transformation unitaire de l'espace tout entier, ce qui donne au moins quatre manières a priori non équivalentes de réaliser l'inclusion indiquée. Les plongements correspondants au niveau des algèbres de Kač-Moody existent et en utilisant les bonnes normalisations on se convainc aisément que $su(m)_n \oplus su(n)_m$ se plonge dans $su(mn)_1$. Les plongements sont conformes comme on le vérifie explicitement sur les formules de charges centrales, et l'articles 2

illustre la dualité (dite dualité rang-niveau) profonde qui en résulte, calculant en particulier les coefficients de branchement de ce plongement. L'article 3 donne une application de la dualité rang-niveau dans un cas non unitaire.

Nous allons nous contenter ici de préciser un peu le contenu de cette dualité, et donner un argument heuristique pour déterminer les coefficients de branchement. Tout d'abord rappelons qu'on peut écrire les poids des représentations unitaires irréductibles de $su(m)_n$ sous la forme $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{m-1} p_i \boldsymbol{\alpha}^i$ où les p_i sont des entiers strictement positifs vérifiant $\sum_{i=1}^{m-1} p_i < m + n$. On peut formellement ajouter une nouvelle coordonnée p_m définie par $\sum_{i=1}^m p_i = m + n$, et ainsi représenter un poids de $su(m)_n$ par un m -uplet d'entiers strictement positifs de somme $m + n$. On note \dot{B}_n cet ensemble, et dans la suite on utilise la convention que les quantités surmontées d'un point se rapportent à $su(m)$ et celles surmontées de deux points à $su(n)$. On peut faire agir le groupe fini \mathbf{Z}_m sur \dot{B}_n par permutation circulaire (on pourrait même faire agir tout le groupe symétrique, seul le sous groupe des permutations circulaires est pertinent, rappelons que c'est aussi le groupe de symétrie du diagramme de Dynkin de l'algèbre de Kač-Moody associée à $su(m)$) et on note $\Omega_{m,n}$ le quotient (c'est à dire l'ensemble des orbites). Le premier élément de dualité entre $su(m)_n$ et $su(n)_m$ (sur lequel on agit bien sûr avec la symétrie \mathbf{Z}_n) est une correspondance bijective entre $\Omega_{m,n}$ et $\Omega_{n,m}$. Cette correspondance s'établit de la façon suivante: on marque sur un disque $m + n$ rayons délimitant des parts égales, puis on choisit une partition des rayons en deux sous ensembles \dot{A} et \ddot{A} contenant respectivement m et n rayons. Les espacements entre les rayons de \dot{A} pris dans le sens des aiguilles d'une montre déterminent exactement une orbite de $su(m)_n$, et ceux entre les rayons de \ddot{A} dans le sens contraire de aiguilles d'une montre une orbite de $su(n)_m$. Ceci établit la correspondance souhaitée. Les lecteurs attentifs (y en aura t-il jusqu'à cette page?) se demanderont ce qui se passe par exemple lorsqu'on définit les deux orbites en utilisant le sens des aiguilles d'une montre. Il est facile de se convaincre que ceci est relié aux différents plongements inéquivalents auxquels nous faisons allusion au début de ce paragraphe. On peut donner explicitement une application de \dot{B}_n dans \ddot{B}_m qui respecte la bijection entre les orbites: On pose $r_j = \sum_{i=j}^m p_i$ pour $1 \leq j \leq m$. On a $m + n = r_1 > \dots > r_m \geq 1$. Le complémentaire de cette suite dans l'intervalle $[1, m + n]$ contient n entiers $\bar{r}_1 > \dots > \bar{r}_n$. On pose alors $s_j = m + n + \bar{r}_n - \bar{r}_{n-j+1}$ pour $1 \leq j \leq n$. A la suite s_j est associé un poids de B_m (les s_j sont des sommes partielles analogues aux r_j) et l'application β associe le poids correspondant à la suite r_j à celui correspondant à la suite s_j . Si σ est un élément de \mathbf{Z}_n et $\dot{\lambda}$ un élément de \dot{B}_n posons

$$\delta(\dot{\lambda}, \sigma) = \sum_{j=1}^m r_j + m\sigma - \frac{1}{2}m(m+1)$$

entier bien défini modulo mn .

On remarque que les poids de $su(mn)_1$ s'organisent en une seule orbite sous l'action de \mathbf{Z}_{mn} et que cette symétrie a d'importantes répercussions sur la forme des matrices S et T . Si l'on note Λ_0 la représentation correspondant au vide, on indexe les autres représentations par l'entier modulo mn dont l'action fait passer de Λ_0 à la représentation considérée. On montre dans l'article 2 les identités suivantes:

$$S(\Lambda, \Pi) = (mn)^{-1/2} \exp\left(\frac{2i\pi}{mn} \Lambda \Pi\right) \quad T(\Lambda, \Lambda) = \exp\left(\frac{i\pi}{mn} \Lambda(mn - \Lambda)\right)$$

et

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \dot{S}(\dot{\lambda}, \dot{m}u) &= nS(\delta(\dot{\lambda}, \sigma), \delta(\dot{\mu}, \nu))\bar{\dot{S}}(\sigma\beta(\dot{\lambda}), \nu\beta(\dot{\mu})) \\ \dot{T}(\dot{\lambda}, \dot{\lambda}) &= T(\delta(\dot{\lambda}, \sigma), \delta(\dot{\lambda}, \sigma))\bar{\dot{T}}(\sigma\beta(\dot{\lambda}), \sigma\beta(\dot{\lambda})) \end{aligned}$$

Mais comme nous l'avons montré dans un plongement conforme les coefficients de branchement sont des entrelaceurs pour l'action du groupe modulaire. Les égalités que nous venons d'écrire montrent qu'il existe un entrelaceur très simple (en quelque sorte l'analogue de l'invariant modulaire diagonal) donné par

$$b(\Lambda, \dot{\lambda}, \ddot{\lambda}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ddot{\lambda} = \sigma\beta(\dot{\lambda}) \text{ et } \Lambda = \delta(\dot{\lambda}, \sigma) \bmod mn \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il se trouve que cet entrelaceur s'identifie en fait aux coefficients de branchement mais la preuve complète est assez compliquée et constitue le point central de l'article 2.

Les relations entre les matrices S et T des diverses composantes du plongement conforme donnent des informations précises sur le problème suivant: quels sont tous les invariants modulaires pour $su(m)_n$ qui sont tels que les éléments de matrice $N^{\dot{\lambda}, \dot{m}u}$ sont nuls sauf si $\dot{\lambda}$ et $\dot{m}u$ sont sur la même orbite. Par exemple si m et n sont premiers entre eux, toutes les orbites ont exactement m éléments, chaque orbite contient un unique élément $\dot{\lambda}$ tel que $\sum_{i=1}^m = 0 \bmod m$, ce qui permet de repérer les éléments de l'orbite à partir de cet élément particulier en faisant agir \mathbf{Z}_m . Ainsi un espace vectoriel dont une base est indexée par les poids de \dot{B}_n a naturellement une structure de produit tensoriel. Dans celui-ci les matrices S et T sont des produits tensoriels purs (conséquence des identités (5.1)) et la matrice N aussi (par hypothèse elle agit comme l'identité dans le premier facteur). Dans le second facteur les matrices S et T sont déterminées par l'action de \mathbf{Z}_m , et il n'est pas étonnant qu'elles aient la même forme (il faut simplement ajuster la racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité) que pour $su(m)_1$. Mais pour cette dernière théorie on connaît explicitement tous les invariants modulaires ([20, 9]), ce qui permet de conclure. Notons que l'on a quelque part simplifié une égalité par un élément de matrice $\dot{S}(\dot{\lambda}, \dot{0})$ ce qui était légitime car on sait que ces nombres sont en fait des réels strictement positifs. Le cas où m et n ont des facteurs communs est beaucoup moins simple: certaines orbites contiennent moins de m éléments, les orbites ne contiennent plus un élément privilégié, ce qui fait perdre la structure de produit tensoriel, mais le plus grave est que pour obtenir certaines équations on a besoin de diviser par un éléments de matrice \dot{S} dont on ne sait pas a priori s'il est non nul. Cependant la même équation peut provenir de simplifications par des éléments de matrice \dot{S} différents. Il est probable (et vérifié sur des exemples simples) que les éléments non nuls de \dot{S} sont organisés de telle sorte qu'au moins une des simplifications soit légitime; mais ce n'est pas évident.

Pour conclure notons que les coefficients de branchement du plongement conforme que nous venons d'étudier ont trouvé récemment une application à l'effet Kondo à deux dimensions dans les travaux de Affleck et Ludwig.

Chapter 6

Le commutant

Comme nous l'avons vu au chapitre 4, la connaissance des invariants modulaires est un outil précieux pour classifier les théories conformes. Elle permet de comprendre le contenu en opérateurs (primaires, mais aussi descendants). Il est donc tentant d'essayer, pour des théories les plus générales possibles, de calculer tous ces invariants. Ce programme est en fait très difficile à réaliser, en tous cas par la voie directe qui mène inévitablement à des problèmes arithmétiques difficiles. Pour l'instant cependant, seule cette voie directe a donné des résultats exhaustifs dans quelques cas simples. A l'heure actuelle les seuls cas traités complètement sont le cas des algèbres affines $su(2)_k$ ([3]) $su(n)_1$ ([20, 9]) $su(n)_2$ (ou, ce qui revient au même, les parafermions) ([15]) et les modèles minimaux pour l'algèbre de Virasoro ([3]) grâce à la structure de coset. Dans le cas $su(3)$ on sait qu'il n'y a que des invariants d'un certain type simple à condition que l'altitude $n = k + 3$ soit première ([39]). Néanmoins nombreuses sont les théories pour lesquelles on connaît des classes d'invariants modulaires trouvés par des méthodes parfois très ingénieuses (nous reviendrons sur certaines plus loin), mais qui en aucun cas n'ont permis de montrer a priori qu'elles épuisaient toutes les possibilités. Un fait très surprenant et sur lequel nous reviendrons aussi plus loin est que dans tous les cas traités complètement, une classification naturelle est apparue. Ceci signifie que les invariants modulaires pour une théorie donnée s'organisent d'une façon naturelle, harmonieuse qui la plupart du temps est de nature géométrique et intimement reliée à diverses branches des mathématiques, suggérant diverses généralisations dont hélas aucune ne semble vraiment (vus nos essais infructueux, comme ceux de nombreux autres chercheurs) être la bonne.

Nous allons maintenant décrire notre tentative par la voie arithmétique dans le cas $su(N)_k$ (les preuves et les calculs détaillés se trouvent dans l'article 4, sauf pour quelques points que nous avons développés ultérieurement et qui sont exposés dans ce chapitre). Même si elle ne permet pas d'arriver (et de loin) jusqu'à la classification, elle montre bien l'ampleur du problème, et donne tout de même des résultats partiels. Comme on peut s'en douter la partie vraiment très difficile vient de la positivité des multiplicités qui interviennent dans un invariant. Rappelons les formules que nous avons établies au chapitre 4 pour les générateurs du groupe modulaire:

$$S_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} = (-i)^{\frac{N(N-1)}{2}} (Nn^{N-1})^{-\frac{1}{2}} \sum_{w \in W} \epsilon(w) e\left(-\frac{\mathbf{p} \cdot {}^w \mathbf{p}'}{n}\right)$$

et

$$T_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} = e \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2n} - \frac{\mathbf{p}_0^2}{2N} \right) \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}$$

Notre tâche est de trouver toutes les matrices à coefficients entiers non négatifs commutant avec l'action du groupe modulaire, c'est à dire avec S et T qui agissent sur un espace vectoriel de dimension $d = \text{Card } B_n = \binom{n-1}{N-1}$. La remarque suivante est fondamentale sur le plan théorique: les matrices carrées d'ordre d à coefficients entiers commutant avec S et T forment un sous-module (pour un rappel bref de la notion de module le lecteur peut se reporter à la section sur les invariants du chapitre suivant, il peut également consulter un livre d'algèbre, par exemple [27]) de l'ensemble de toutes les matrices carrées à coefficients entiers, le commutant est donc un sous-module d'un \mathbf{Z} module libre et comme \mathbf{Z} est un anneau principal le commutant est un module libre sur \mathbf{Z} (ceci signifie simplement qu'il a une \mathbf{Z} base). Cependant en pratique nous voulons des matrices à coefficients positifs et ceci nécessite la construction explicite d'une base, aussi canonique que possible. Malheureusement nous n'y sommes pas parvenus. Nous avons néanmoins réussi à construire une base pour le commutant sur \mathbf{C} et une famille génératrice pour le commutant sur \mathbf{Z} , toutes deux canoniques.

6.1 Préliminaires

Commençons par rappeler quelques propriétés des groupes abéliens finis et de l'action du groupe modulaire sur ces groupes. Si les entiers a_1, \dots, a_l ne sont pas tous nuls, nous désignons leur plus grand commun diviseur par $[a_1, \dots, a_l]$. Les résultats suivants sont utilisés très souvent par la suite.

- Il existe b_1, \dots, b_l entiers tels que $\sum a_i b_i = [a_1, \dots, a_l]$ (Théorème de Bezout).
- Tout groupe abélien fini G est isomorphe à un produit direct $\mathbf{Z}_{a_1} \times \mathbf{Z}_{a_2} \times \dots \times \mathbf{Z}_{a_l}$ avec a_{i+1} divisible par a_i pour $i = 1, \dots, l-1$. Cette décomposition est unique et si G_1 est un sous-groupe de G_2 le nombre de facteurs de G_1 est inférieur ou égal à celui de G_2 . On convient de dire que g_1, \dots, g_l est une base factorisée de G si l'application $j : \mathbf{Z}^l \rightarrow G$, définie par $(\lambda_1, \dots, \lambda_l) \rightarrow \sum \lambda_i g_i$ est surjective de noyau $a_1 \mathbf{Z} \times \dots \times a_l \mathbf{Z}$ (Théorème des diviseurs élémentaires de Kronecker).
- Pour tout triplet d'entiers u, v, w , tels que $v \neq 0$ et $[u, v, w] = 1$ il existe un entier y tel que $[u + yv, w] = 1$.

Nous allons prouver brièvement les deux derniers points. Le théorème de Kronecker se montre en plusieurs étapes:

On raisonne par récurrence sur l'ordre de G . Si G est un groupe fini tous ses éléments sont d'ordre fini, et on note m le plus petit commun multiple des ordres des éléments de G . La première remarque est que m est lui même l'ordre d'un élément de G . En effet il suffit de combiner les deux résultats faciles suivants: si m' est un ordre tout diviseur de m' en est un, et si m_1 et m_2 sont des ordres premiers entre eux $m_1 m_2$ est un ordre (si g_1 et g_2 sont d'ordre m_1 et m_2 on choisit b_1 et b_2 solutions de $b_2 m_1 - b_1 m_2 = 1$ et $b_1 g_1 + b_2 g_2$ est d'ordre $m_1 m_2$)

On choisit alors un élément g_0 d'ordre m et on note G_0 le sous-groupe d'ordre m isomorphe à \mathbf{Z}_m qu'il engendre. On considère les sous-groupes de G dont l'intersection avec G_0 est réduite à 0 (l'élément neutre); leur nombre est fini, ils sont partiellement ordonnés par l'inclusion donc on peut en choisir un maximal (il peut y en avoir plusieurs) G' . Si l'on peut montrer que $G = G_0 \oplus G'$ (la somme est directe à cause de la définition de G') donc que G est isomorphe au produit direct $G_0 \times G'$ le théorème sera démontré. En effet G' est d'ordre strictement plus petit que G et l'ordre des éléments de G' divise m donc en appliquant l'hypothèse de récurrence à G' on en obtient une décomposition que l'on complète avec G_0 pour obtenir celle de G . Supposons donc qu'un élément g de G n'est pas dans $G = G_0 \oplus G'$. Comme G' est maximal le groupe engendré par g et G' a une intersection non triviale avec G_0 , donc il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $kg \in G_0 \oplus G'$; l'ensemble de ces k est un sous-groupe de \mathbf{Z} qui contient les multiples de l'ordre de g donc les multiples de m (qui est le ppcm de tous les ordres). Les k sont donc des multiples d'un diviseur de m noté k_0 . On a donc $k_0g = lg_0 + g'$, et multipliant ceci par m/k_0 on vérifie que k_0 divise l , $l = l_0k_0$. Alors $h = g - l_0g_0$ n'est pas dans $G_0 \oplus G'$ non plus, et le groupe engendré par h et G' a une intersection triviale avec G_0 (si $kh + g' \in G_0$ alors $kg \in G_0 \oplus G'$ donc k est multiple de k_0 mais $k_0h \in G'$ donc $kh + g' \in G'$ ce qui contredit la maximalité de G'). Donc $G = G_0 \oplus G'$ ce qui termine la preuve.

Le troisième résultat (que nous appelons lemme d'élimination) est peut-être connu mais nous n'en avons pas trouvé trace dans les cours élémentaires d'arithmétique; il s'est révélé un instrument très puissant. La preuve est assez instructive : associons à chaque entier x le diviseur (non nul) de w , $\delta_x = [u + xv, w]$. Si $[x, u] = 1$ alors $[\delta_x, u] = [u + xv, w, u] = [xv, w, u] = [v, w, u] = 1$. Soit I l'ensemble des entiers δ_x lorsque x parcourt les entiers premiers avec u . Cet ensemble est non vide car $[1, u] = 1$ et $\delta_1 \in I$, et il est fini car les δ_x sont des diviseurs de w . Les éléments de I , donc leur produit y , sont premiers avec u , donc $\delta_y \in I$, $[\delta_y, u] = 1$. D'après la définition de y , l'entier δ_y divise y , et il divise aussi $u + yv$ d'après la définition de δ_y , donc il divise aussi u . Comme il est premier avec u , δ_y doit être égal à 1, ce qui conclut la preuve.

L'anneau $\mathbf{M}_2(\mathbf{Z})$ des matrices 2×2 à coefficients entiers agit sur $G \times G$ par la multiplication à droite de la façon suivante $(g, g') \rightarrow (ag + cg', bg + dg')$, pour $(g, g') \in G \times G$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbf{Z})$. A fortiori $SL(2, \mathbf{Z})$ agit sur $G \times G$. A chaque paire $(h, h') \in G \times G$ associons le sous-groupe de $H \subset G$ qu'elle engendre. Ce sous-groupe reste inchangé si l'on remplace (h, h') par une autre paire déduite par l'action de $SL(2, \mathbf{Z})$ sur (h, h') . Donc on peut parler en général du sous-groupe H de G associé à l'orbite de $(h, h') \in G \times G$ sous l'action de $SL(2, \mathbf{Z})$. Clairement $H \times H$ est aussi stable sous l'action de $SL(2, \mathbf{Z})$, et nous allons classifier les orbites contenues dans $H \times H$.

Supposant $H \neq \{0\}$ nous savons que H est isomorphe à un produit direct de la forme $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_{pq}$ avec $(p, q) \neq (1, 1)$. Si nous choisissons une base factorisée (g, g') de H nous pouvons représenter un élément de H comme un vecteur colonne, et un élément de $H \times H$ comme une matrice deux par deux avec la première ligne mod p et la seconde mod pq . Alors $\mathbf{M}_2(\mathbf{Z})$ agit par la multiplication matricielle ordinaire. Il y a deux résultats principaux (les détails des preuves se trouvent dans l'article 4). Voici le premier:

- Dans $G \times G$ il y a exactement $\phi(p) = \text{Card } \mathbf{Z}_p^*$ orbites qui engendrent H et chacune d'elles contient une paire de la forme $(\sigma g, g')$ avec $\sigma \in \mathbf{Z}_p^*$.

L'énoncé du second nécessite quelques définitions préliminaires. Soit $M = \begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \\ \bar{x}' & \bar{y}' \end{pmatrix}$ un élément de $\mathbf{M}_2(\mathbf{Z})$. Clairement $\delta = [\bar{x}, \bar{y}, p]$ et $\delta' = [\bar{x}', \bar{y}', pq]$ sont des invariants de l'orbite engendrée par $(g, g')M$. Posant $\bar{x} = \delta x, \bar{y} = \delta y, \bar{x}' = \delta' x', \bar{y}' = \delta' y'$ nous remarquons que $(\delta g, \delta' g')$ engendre un groupe isomorphe à $\mathbf{Z}_r \times \mathbf{Z}_s$ où $r = p/\delta, s = pq/\delta'$. Définissons alors ρ et κ par $\rho = [r, s]$ et $\kappa\rho = rs$. Le déterminant $\Delta = xy' - yx'$ est bien défini mod ρ et est également un invariant de l'orbite. Finalement on choisit une solution de $xu + yv = 1 \pmod{\rho}$ et on note Ω' la quantité $x'u + y'v$. Il est possible de vérifier que Ω' est bien défini et inversible mod $[\rho, \Delta]$ et que c'est aussi un invariant de l'orbite. Voici alors le second résultat:

- les quatre invariants δ un diviseur de p , δ' un diviseur de pq , $\Delta \pmod{[p/\delta, pq/\delta']}$ et $\Omega \in \mathbf{Z}_{[p/\delta, pq/\delta', \Delta]}^*$ définis ci-dessus caractérisent entièrement une orbite, ce qui signifie que deux paires dans $H \times H$ avec les mêmes invariants sont images l'une de l'autre par un transformation $SL(2, \mathbf{Z})$.

Ces résultats serviront par la suite, mais ils vont nous permettre immédiatement de calculer le nombre d'orbites de $SL(2, \mathbf{Z})$ dans $G \times G$. L'article 4 contient le calcul uniquement dans le cas où G a une base factorisée à deux éléments, mais ultérieurement Philippe Ruelle ([40]) a obtenu le résultat général. Nous nous sommes alors rendu compte que notre méthode permettait de retrouver son résultat de manière à notre avis plus simple et plus explicite. L'intérêt de ce calcul est que nous allons voir plus loin que les éléments du commutant sont en correspondance biunivoque avec des orbites de l'action de $SL(2, \mathbf{Z})$ sur un groupe fini.

Comme c'est souvent le cas pour des calculs arithmétiques, les résultats se factorisent sur les nombres premiers. Le mécanisme de cette décomposition n'est pas ici totalement évident, et nous le rappelons brièvement. Tout d'abord si G est un produit direct de deux groupes G_1 et G_2 on peut représenter un de ses éléments comme un vecteur colonne, et les paires d'éléments comme des matrices deux par deux avec la première ligne dans G_1 et la seconde dans G_2 , et l'action de $SL(2, \mathbf{Z})$ est un produit matriciel. Sous cette forme il est clair que si deux paires dans G sont sur la même orbite les paires de composantes sur G_1 (respectivement G_2) associées sont aussi sur la même orbite. Le fait non évident est que si les cardinaux de G_1 et G_2 (Π_1 et Π_2 avec $\Pi_1\Pi_2 = \Pi$) sont premiers entre eux la réciproque est vraie. Pour le voir considérons deux paires dans G_1 (resp dans G_2), et supposons qu'il existe une matrice M_1 (resp M_2) de $SL(2, \mathbf{Z})$ telle que les deux paires de G_1 (resp G_2) sont reliées par M_1 (resp M_2) Comme $[\Pi_1, \Pi_2] = 1$ on peut appliquer le théorème des résidus chinois (qui dit que si Π_1 et Π_2 sont premiers entre eux, et si a_1 et a_2 sont des entiers donnés il existe un entier a tel que $a \equiv a_1 \pmod{\Pi_1}$ et $a \equiv a_2 \pmod{\Pi_2}$) à chaque élément de matrice pour construire une matrice M égale à $M_1 \pmod{\Pi_1}$ et à $M_2 \pmod{\Pi_2}$. Alors le déterminant de M vaut $1 \pmod{\Pi}$ (posons $\det M = 1 - \Pi f$), et on est ramené au lemme suivant: Il existe dans $SL(2, \mathbf{Z})$ une matrice M' égale à $M \pmod{\Pi}$. Pour l'exhiber on considère les matrices de la forme

$$M' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \Pi \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

où la première matrice est M et la seconde l'inconnue. Le déterminant de M' vaut 1 si et seulement si

$$\Pi(\alpha\delta - \beta\gamma) + d\alpha + a\delta - c\beta - b\gamma = f$$

De $ad - bc = 1 \pmod{\Pi}$ on déduit que $(c, d) \neq (0, 0)$ (par exemple prenons $c \neq 0$) et $[c, d, \Pi] = 1$. D'après le lemme d'élimination on peut choisir δ tel que $[c, d + \Pi\delta] = 1$. Si l'on choisit également $\gamma = 0$ l'équation devient $\alpha(d + \Pi\delta) - \beta c = f - a\delta$ qui a une solution en α, β d'après le théorème de Bezout. Nous avons donc trouvé une solution M' à notre problème, et par là même démontré la factorisation de l'action du groupe modulaire agissant sur un produit direct de groupes abéliens d'ordre deux à deux premiers entre eux. Enfin on applique le théorème de Kronecker : G est isomorphe à un produit direct de la forme $\mathbf{Z}_{a_1} \times \mathbf{Z}_{a_2} \times \dots \times \mathbf{Z}_{a_l}$ avec a_{i+1} divisible par a_i pour $i = 1, \dots, l-1$. On décompose alors chaque a en facteurs premiers: $a = \prod_{p \text{ premier}} p^{k_p}$ (où presque tous les exposants sont nuls). Le théorème des résidus chinois montre que \mathbf{Z}_a est isomorphe à $\prod_{p \text{ premier}} \mathbf{Z}_{p^{k_p}}$.

Pour la suite nous allons donc fixer un nombre premier p et compter les orbites dans un groupe G isomorphe à $\mathbf{Z}_{p^{l_1}} \times \dots \times \mathbf{Z}_{p^{l_s}}$ où nous supposons $l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_s$. Si u est un entier positif nous désignons par G_u le sous-groupe de G formé des $g \in G$ d'ordre inférieur ou égal à p^u . C'est un groupe isomorphe à un produit $\mathbf{Z}_{p^{l'_1}} \times \dots \times \mathbf{Z}_{p^{l'_s}}$ où $l'_i = \inf(l_i, u)$, l'isomorphisme de ce produit dans G_u étant obtenu par la multiplication composante par composante par $p^{l''_i}$ où $l'_i + l''_i = l_i$. Notons que $G_0 = \{0\}$ (pour la suite on suppose en fait $u \neq 0$) et $G_u = G$ si $u \geq l_s$. Fixons pour l'instant deux entiers u, v tels que $0 \leq v \leq u \leq l_s$ et cherchons à compter les sous-groupes H de G isomorphes à $\mathbf{Z}_{p^v} \times \mathbf{Z}_{p^u}$ (on supposera u et v strictement positifs car dans les autres cas le décompte est élémentaire). Ce sont en fait des sous-groupes de G_u , et on peut donc compter les sous-groupes H dans ce groupe. Nous allons procéder en deux étapes: nous allons d'abord compter le nombre $\mathcal{C}(u, v)$ de bases factorisées pour un groupe H (bien sûr ce nombre ne dépend que de u, v , et pas du H particulier choisi), et ensuite nous allons compter le nombre $\mathcal{M}_G(u, v)$ de paires (x, y) dans G_u avec x d'ordre p^u , y d'ordre p^v telles que (x, y) soit une base factorisée d'un H quelconque. Il est facile de se convaincre que $\mathcal{N}_G(u, v)$, nombre des sous-groupes, est simplement le quotient de ces deux nombres.

Le nombre \mathcal{C} se calcule aisément. On remarque que $\mathbf{Z}_{p^v} \times \mathbf{Z}_{p^u}$ contient (si l'on désigne par φ la fonction d'Euler) $p^v \varphi(p^u)$ éléments d'ordre p^u si $v < u$ et $p^u(1 + 1/p)\varphi(p^u)$ si $v = u$ (dans une base factorisée c'est évident: une des deux composantes doit être d'ordre p^u et l'autre est quelconque). Une fois choisi un tel élément x notre démonstration du théorème de Kronecker indique qu'on peut le compléter pour former une base factorisée en adjoignant un certain y d'ordre p^v . Dans cette base on vérifie que tout y' complétant x pour faire une base factorisée peut s'écrire comme somme d'un multiple de x d'ordre au plus p^v et d'un multiple de y d'ordre exactement p^v . Donc \mathcal{C} vaut $p^{2v} \varphi(p^v) \varphi(p^u)$ si $v < u$ et $p^{2u} (1 + 1/p) \varphi(p^u)^2$ si $v = u$.

Le nombre \mathcal{M}_G est à peine plus compliqué à calculer (d'ailleurs le calcul de \mathcal{C} est un cas particulier). A nouveau on commence par chercher le nombre d'éléments $x \in G_u$ d'ordre p^u . Dans une base factorisée la condition sur x est qu'une des composantes sur les facteurs \mathbf{Z}_{p^u} soit inversible, alors que le choix des composantes sur les facteurs $\mathbf{Z}_{p^{l'_i}}$ avec $l'_i < u$ est arbitraire. Si α est le nombre de facteurs \mathbf{Z}_{p^u} dans G_u , le nombre cherché est donc

$$\frac{\text{card } G_u \varphi(p^u) (p^\alpha - 1)}{p^{u+\alpha-1} (p - 1)}$$

Une fois x choisi, on peut le compléter pour faire une base factorisée de G_u (toujours le théorème de Kronecker) et dans cette base un y formant avec x une base factorisée pour un certain H

s'écrit comme somme d'un multiple d'ordre au plus p^v de x et d'un élément d'ordre exactement p^v . Le nombre de tels y est donc

$$\frac{\text{card } G_v \varphi(p^v) (p^{\beta-1} - 1)}{p^{v+\beta-2} (p-1)}$$

où β est le nombre de facteurs \mathbf{Z}_{p^v} dans G_v , et l'on suppose $\beta \geq 2$ (sinon G ne contient aucun sous-groupe de la forme cherchée et $\mathcal{M}_g(u, v)$ vaut zéro dans ce cas). Le nombre \mathcal{M}_G est simplement le produit des nombres associés à u et v calculés ci dessus.

Finalement le nombre d'orbites peut s'écrire

$$\text{card } \mathcal{O} = \sum_{0 \leq v \leq u} \mathcal{N}_G(u, v) \varphi(p^v) = \sum_{0 \leq v \leq u} \frac{\mathcal{M}_G(u, v)}{\mathcal{C}(u, v)} \varphi(p^v)$$

car nous avons montré qu'il y avait une correspondance biunivoque entre les sous-groupes de G ayant au plus deux générateurs et leurs familles d'orbites génératrices (si H est isomorphe à $\mathbf{Z}_{p^v} \times \mathbf{Z}_{p^u}$ il contient $\varphi(p^v)$ orbites génératrices). Dans le cas où les l_i sont arbitraires la somme ci dessus est compliquée, mais en fait dans le cas qui nous intéresse pour les théories conformes, tous les l_i sauf peut-être le plus grand seront égaux. On peut alors calculer très explicitement le nombre d'orbites (à condition d'avoir su décomposer en facteurs premiers les nombres qui intervenaient dans le groupe de départ, mais ça c'est une autre histoire). Supposons le nombre s de facteurs dans G supérieur ou égal à deux, et choisissons tous les l_i égaux à l sauf l_s qui vaut $l + l'$, avec l' positif ou nul. En utilisant les formules d'énumération que nous venons de montrer, on sépare la somme sur u et v en six contributions:

$$\begin{aligned} \text{card } \mathcal{O} = & \sum_{0=v=u} 1 + \frac{p^s - 1}{p-1} \sum_{0=v < u \leq l} p^{(s-1)(u-1)} + \frac{(p^s - 1)(p^{s-1} - 1)}{p^2 - 1} \sum_{1 \leq v = u \leq l} p^{(2s-3)(u-1)} \\ & + \frac{(p^s - 1)(p^{s-1} - 1)}{p(p-1)} \sum_{1 \leq v < u \leq l} p^{(s-1)(u-1) + (s-2)(v-1)} \\ & + p^{(s-1)l} \sum_{0=v < l < u \leq l+l'} 1 + p^{(s-1)l-1} (p^{s-1} - 1) + \sum_{1 \leq v \leq l < u \leq l+l'} p^{(s-2)(v-1)} \end{aligned}$$

Il ne reste qu'à calculer quelques sommes géométriques pour obtenir le résultat final, dont la forme ne se simplifie que dans les limites singulières $s = 1$ et $s = 2$ pour redonner les expressions connues

$$\begin{aligned} \text{card } \mathcal{O} = & 1 + \frac{p^s - 1}{p-1} \frac{p^{(s-1)l} - 1}{p^{s-1} - 1} + \frac{(p^s - 1)(p^{s-1} - 1)}{p^2 - 1} \frac{p^{(2s-3)l} - 1}{p^{2s-3} - 1} \\ & + \frac{(p^s - 1)(p^{s-1} - 1)}{p(p-1)(p^{s-2} - 1)} \left(\frac{p^{(2s-3)l} - 1}{p^{2s-3} - 1} - \frac{p^{(s-1)l} - 1}{p^{s-1} - 1} \right) \\ & + l' \left(p^{(s-1)l} + p^{(s-1)l-1} (p^{s-1} - 1) \frac{p^{(s-2)l} - 1}{p^{s-2} - 1} \right) \end{aligned}$$

En passant à la limite on obtient $l + 1$ dans le cas $s = 1$ et $p^l [(l+1)(l'+1) + l(1-l')/p]$ dans le cas $s = 2$.

En faisant le produit de tels facteurs correspondants à des p différents on obtient le résultat recherché pour un groupe G quelconque. Nous avons ainsi défini une famille de fonctions multiplicatives (au sens arithmétique du terme), nous ne savons pas si elles sont utiles dans d'autres contextes.

6.2 Mécanique quantique finie

Comme nous l'avons remarqué au chapitre 3, les fonctions théta du réseau des poids portent même avant l'antisymétrisation sur le groupe de Weyl une représentation du groupe modulaire. Celle-ci est beaucoup plus facile à manipuler car les indices de S et T sont à valeur dans le groupe abélien fini M^*/nM . Ainsi, en laissant de côté les repliements du groupe de Weyl, nous pourrions exploiter l'invariance par translation. C'est en réintroduisant ces repliements que des signes indésirables vont se glisser dans les éléments de matrice du commutant, et c'est là l'obstacle majeur de cette approche. Dans le cas de $su(2)$, il n'y a qu'une antisymétrie et le problème peut être complètement résolu.

On introduit donc un espace vectoriel E muni d'une base orthonormée $|\mathbf{p}\rangle$, $\mathbf{p} \in M^*/nM$. Dans la suite il est commode de multiplier le produit scalaire traditionnel du réseau des poids par N pour qu'il prenne des valeurs entières. Le commutant est clairement indépendant des phases globales de S et T et ceci permet de travailler avec des opérateurs un peu plus simples

$$(6.1) \quad S|\mathbf{p}\rangle = \frac{1}{(Nn^{N-1})^{-\frac{1}{2}}} \sum_{\mathbf{p}' \in M^*/nM} e(-\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'}{nN}) |\mathbf{p}'\rangle$$

$$(6.2) \quad T|\mathbf{p}\rangle = e(\frac{\mathbf{p}^2}{2nN}) |\mathbf{p}\rangle \quad C|\mathbf{p}\rangle = |-\mathbf{p}\rangle$$

On vérifie aisément que S et T sont bien définis sur $M^*/nM \cong G^{(n)}$ (c'est à dire indépendants des représentants choisis pour calculer les produits scalaires). Nous allons maintenant reconnaître en S et T les générateurs de transformations canoniques pour une mécanique quantique finie appropriée. Afin d'exploiter l'invariance par translation, nous allons considérer pour $\mathbf{p} \in G^{(n)}$ des opérateurs portant une représentation de $G^{(n)}$. Soient $P^{\mathbf{p}}$ and $Q^{\mathbf{p}}$ définis de la manière suivante

$$(6.3) \quad P^{\mathbf{p}}|\mathbf{p}'\rangle = |\mathbf{p} + \mathbf{p}'\rangle \quad Q^{\mathbf{p}}|\mathbf{p}'\rangle = e(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'}{nN}) |\mathbf{p}'\rangle$$

Ils satisfont aux relations de commutation fondamentales

$$(6.4) \quad P^{\mathbf{p}'} Q^{\mathbf{p}} = e(-\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'}{nN}) Q^{\mathbf{p}} P^{\mathbf{p}'}$$

Les opérateurs $P^{\mathbf{p}'} Q^{\mathbf{p}}$ forment une base (analogue à la base de Wigner en mécanique quantique usuelle) de $End(E)$ et l'action adjointe S et T est très simple

$$(6.5) \quad S^\dagger P^{\mathbf{p}} S = Q^{\mathbf{p}} \quad S^\dagger Q^{\mathbf{p}} S = P^{-\mathbf{p}}$$

$$(6.6) \quad T^\dagger P^{\mathbf{p}} T = e(\frac{\mathbf{p}^2}{2nN}) P^{\mathbf{p}} Q^{-\mathbf{p}} \quad T^\dagger Q^{\mathbf{p}} T = Q^{\mathbf{p}}$$

On obtient une forme plus suggestive encore en passant au recouvrement $G^{(2n)}$ de $G^{(n)}$. Pour \mathbf{k}, \mathbf{k}' dans $G^{(2n)}$ se projetant sur \mathbf{p}, \mathbf{p}' dans $G^{(n)}$ posons $\{\mathbf{k}, \mathbf{k}'\} = \xi^{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} P P Q P'$ où $\xi = e(\frac{1}{2nN})$. On vérifie que

$$(6.7) \quad S^\dagger \{\mathbf{k}, \mathbf{k}'\} S = \{-\mathbf{k}', \mathbf{k}\} \quad T^\dagger \{\mathbf{k}, \mathbf{k}'\} T = \{\mathbf{k}, \mathbf{k}' - \mathbf{k}\}$$

Donc S et T agissent sur $\{\mathbf{k}, \mathbf{k}'\}$ comme la multiplication à droite par les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur la paire $(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ de $G^{(2n)} \times G^{(2n)}$. Ces opérations engendrent une action de $SL(2, \mathbf{Z})$, mais nous savons que $G^{(n)}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}_{nN} \times \mathbf{Z}_n^{N-2}$ ce qui prouve que seul le groupe quotient $SL(2, \mathbf{Z}_{2nN})$ agit. Le progrès est que ce groupe est fini et qu'on peut faire des moyennes sur ses éléments pour obtenir le commutant. Pour $K \in SL(2, \mathbf{Z}_{2nN})$, $K = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nous utilisons la notation $\{\mathbf{k}, \mathbf{k}'\} K$ pour désigner $\{a\mathbf{k} + c\mathbf{k}', b\mathbf{k} + d\mathbf{k}'\}$. Les opérateurs

$$(6.8) \quad \sum_{K \in SL(2, \mathbf{Z}_{2nN})} \{\mathbf{k}, \mathbf{k}'\} K$$

ou de façon équivalente

$$(6.9) \quad I_{\mathcal{O}} = \sum_{\{\mathbf{k}, \mathbf{k}'\} \in \mathcal{O}} \{\mathbf{k}, \mathbf{k}'\}$$

où \mathcal{O} parcourt les orbites de l'action de $SL(2, \mathbf{Z}_{2nN})$ sur $G^{(2n)} \times G^{(2n)}$ engendrent le commutant de S et T .

On montre sans peine que si $(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ élément de \mathcal{O}_1 et $(\mathbf{l}, \mathbf{l}')$ élément de \mathcal{O}_2 ont une même projection dans $G^{(n)} \times G^{(n)}$ alors $I_{\mathcal{O}_1} \xi^{-\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = I_{\mathcal{O}_2} \xi^{-\mathbf{l}, \mathbf{l}'}$. De plus deux paires qui appartiennent à une même orbite de $G^{(n)} \times G^{(n)}$ donnent le même invariant à une phase près quand on les remonte dans $G^{(2n)} \times G^{(2n)}$. Enfin des orbites distinctes sont disjointes, ce qui prouve que les invariants non nuls associés (à une phase près) aux orbites dans $G^{(n)} \times G^{(n)}$ forment une base du commutant sur \mathbf{C} . On peut montrer le critère suivant de non-annulation d'un invariant associé à une orbite (si N est pair on dit que l'orbite de $(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ dans $G^{(n)} \times G^{(n)}$ est paire si $\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}'^2 = 0 \pmod{4}$) :

- Si N est impair, à chaque orbite dans $G^{(n)} \times G^{(n)}$ est associé un élément d'une base du commutant, bien défini à une phase près. Si N est pair la même chose est vraie en se restreignant aux orbites paires.

Nous venons donc d'obtenir une base canonique du commutant.

Remarquons que si N est pair les éléments pairs de $G^{(n)}$ forment un sous-groupe d'indice 2, isomorphe à $\mathbf{Z}_{nN/2} \times \mathbf{Z}_n^{N-2}$, et les formules de la fin de la section précédente permettent de calculer le nombre d'orbites, donc la dimension du commutant sur \mathbf{C} . En fait nous allons voir que le commutant sur \mathbf{Z} a la même dimension. On se convainc facilement que (même après les repliements dus au groupe de Weyl qui typiquement divisent la dimension ci-dessus par $N!$) le commutant est rapidement un objet énorme et d'un maniement peu commode.

Nous allons maintenant décrire une autre famille génératrice naturelle du commutant, faite de matrices dont les coefficients sont des entiers (en fait 0 ou 1), prouvant par là même que le commutant sur \mathbf{Z} engendre le commutant complet. Cependant cette famille est redondante et il n'est pas clair qu'il soit possible d'en extraire une base naturelle (c'est à dire obtenue par une prescription uniforme pour tous les N et n).

Si H est un sous-groupe de $G^{(n)}$, nous définissons son dual de la manière suivante

$$(6.10) \quad \hat{H} = \{\hat{\mathbf{p}} \in G^{(n)}, \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{p} = 0 \bmod nN\}$$

le fait que $\hat{H} = H$ peut se voir comme une manifestation que $S^2 = 1$. Soit r un homomorphisme de H dans $G^{(n)}/\hat{H}$ satisfaisant $2\mathbf{p} \cdot r(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2 \bmod 2nN$. On peut prouver que la matrice Ω définie par ses éléments

$$(6.11) \quad \langle \mathbf{x} | \Omega | \mathbf{x}' \rangle = \delta_{\mathbf{x}+H, \mathbf{x}'+H} \delta_{\mathbf{x}+\hat{H}, r(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}$$

appartient au commutant. Notons en passant que cette construction est très simple dans le cas $N = 2$: le groupe G_n est alors isomorphe à \mathbf{Z}_{2n} , l'existence d'un homomorphisme r satisfaisant aux conditions ci dessus impose que le sous-groupe de G_n soit de la forme $2\delta\mathbf{Z}_{2n}$ où delta est un diviseur de n (on pose $\delta' = n/\delta$), et on obtient la forme suivante pour les matrices Ω

$$(6.12) \quad \langle x | \Omega_\delta | x' \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } x - x' \equiv 0 \bmod 2\delta \text{ et } x + x' \equiv 0 \bmod 2\delta' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous nous concentrons maintenant sur une orbite \mathcal{O} dans $G^{(2n)} \times G^{(2n)}$, et notons G le sous-groupe qu'elle détermine, isomorphe à un certain $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_{pq}$. Pour $(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathcal{O}$ et $(\mathbf{l}, \mathbf{l}') \in G \times G$ appartenant à une certaine orbite \mathcal{O}' , il existe une matrice $M \in \mathbf{M}_2(\mathbf{Z})$ telle que $(\mathbf{l}, \mathbf{l}') = (\mathbf{k}, \mathbf{k}')M$ dont le déterminant $\det M$ est bien défini modulo p et indépendant des représentants $(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ dans \mathcal{O} , et $(\mathbf{l}, \mathbf{l}')$ dans \mathcal{O}' . Donc nous pouvons définir une application bilinéaire antisymétrique de $G \times G$ dans \mathbf{Z}_p par

$$(6.13) \quad B_{\mathcal{O}}(\mathbf{l}, \mathbf{l}') = \det M \bmod p$$

et il est cohérent d'écrire $B_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}')$. De plus si $\tilde{\mathcal{O}}$ engendre aussi G alors $B_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}') = B_{\mathcal{O}}(\tilde{\mathcal{O}})B_{\tilde{\mathcal{O}}}(\mathcal{O}')$. Pour tout $t \bmod p$ soit H le groupe formé par les \mathbf{p} dans $G^{(n)}$ tels qu'il existe \mathbf{l} dans G avec projection \mathbf{p} dans $G^{(n)}$ et \mathbf{x} in $G^{(n)}$ vérifiant pour tout \mathbf{k} dans G

$$(6.14) \quad \mathbf{l} \cdot \mathbf{k} + 2\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \frac{2nN}{p} t B_{\mathcal{O}}(\mathbf{l}, \mathbf{k}) = 0 \bmod 2nN$$

où \mathbf{q} est la projection de \mathbf{k} dans $G^{(n)}$. Ces conditions sont linéaires, assurant que H est un sous-groupe de $G^{(n)}$. Pour \mathbf{p} dans H \mathbf{x} est défini exactement modulo \hat{H} et en associant à \mathbf{p} la classe de \mathbf{x} dans \hat{H} on définit un homomorphisme r satisfaisant à la propriété précédente. De plus à un facteur multiplicatif près, l'élément du commutant que l'on définit ainsi est simplement

$$(6.15) \quad J_{\mathcal{O}, t} = \frac{1}{|G|} \sum_{\mathcal{O}' \subset G \times G} \xi^{\frac{2nN}{p} t B_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}')} I_{\mathcal{O}'}$$

On peut alors utiliser la longueur de la décomposition de Jordan-Hölder en une suite de sous-groupes maximaux comme paramètre d'induction (le théorème dit que cette longueur est

indépendante de la décomposition et est strictement décroissante pour une inclusion stricte) et utiliser la transformation de Fourier finie pour vérifier que les J engendrent le même espace vectoriel que les I , mais en général ils satisfont de nombreuses relations (pas seulement celles qui sont triviales, du type : $J_{\mathcal{O},t} = J_{\tilde{\mathcal{O}},tB_{\mathcal{O}}(\tilde{\mathcal{O}})}$).

Au chapitre suivant, nous verrons comment tout ceci se simplifie dans le cas $su(2)$ pour permettre une classification complète des invariants modulaires.

Chapter 7

Digressions algébriques

De nombreux problèmes rencontrés dans l'étude des théories conformes peuvent se formuler en termes de théorie des groupes, d'algèbre commutative ou de géométrie algébrique. Bien souvent ces sujets s'interpénètrent, et le but de ce chapitre est de montrer quelques-unes de ces connexions et les généralisations qu'elles suggèrent. Nous avons une fois de plus choisi l'exemple de l'invariance modulaire pour illustrer notre propos. La première section est assez technique, mais elle sera utilisée dans la suite du chapitre et permet également d'introduire des notions qui complètent la discussion de l'article 5. Même si nous avons essayé de n'utiliser qu'un minimum de notions peu familières aux physiciens et de donner presque toutes les preuves, le lecteur préférera peut être faire un détour par la littérature mathématique, le plus abordable est à notre avis [27] qui contient (de manière plus aérée donc moins indigeste) la plus grande partie du matériel présenté ici.

7.1 Invariants des représentation des groupes finis

Rappelons quelques définitions et propriétés élémentaires. Soit G un groupe fini (pas forcément commutatif) dont l'opération est notée multiplicativement. Pour chaque élément g de G , on définit l'application de G dans G suivante: $\sigma_g(h) = ghg^{-1}$. Il est clair que ces applications sont bijectives, sont des homomorphismes du groupe G , forment un groupe pour la composition et qu'en fait $\sigma : g \rightarrow \sigma_g$ est un homomorphisme de groupe. Ce groupe s'appelle groupe des automorphismes intérieurs de G . Le noyau de σ est le sous-groupe de G constitué des éléments qui commutent avec tous les autres, et s'appelle le centre de G . Deux éléments de G image l'un de l'autre par un automorphisme intérieur sont dits conjugués (c'est une relation d'équivalence avec les classes de conjugaison associées). On obtient de même la notion de sous-groupes conjugués, un sous-groupe se confondant avec ses conjugués (c'est à dire laissé globalement invariant par les automorphismes intérieurs) est appelé sous-groupe distingué. Un groupe est dit simple si ses seuls sous-groupes distingués sont lui-même et le groupe restreint à l'élément neutre. On appelle représentation linéaire de G un homomorphisme de G dans le groupe linéaire d'un espace vectoriel V . Nous n'utiliserons en fait que le cas où V est un espace vectoriel complexe. Une représentation est dite irréductible si les seuls sous espaces de V laissés globalement invariants par tous les endomorphismes de la représentation sont V tout entier et le sous espace restreint

au vecteur nul.

7.1.1 Le théorème fondamental de la théorie des invariants

Un des problèmes importants de la théorie des représentations est le suivant: si l'on choisit une base de V , quelles sont les fonctions des coefficients sur cette base laissées invariantes par l'action de G (prenons un exemple très connu: si l'on prend une base orthonormée de l'espace euclidien usuel à trois dimensions, les fonctions des coefficients invariantes dans les rotations sont les fonctions de la distance à l'origine). Nous allons formuler ce problème de manière plus algébrique et plus intrinsèque. Nous commençons par nous restreindre aux fonctions polynomiales des coefficients (voilà pour l'aspect algébrique), puis nous remarquons que l'algèbre symétrique de V notée $\mathcal{S}(V)$ se ramène après choix d'une base dans V aux polynômes dans les coefficients (si V est de dimension finie, ce que nous supposons très souvent dans la suite, $\mathcal{S}(V)$ est isomorphe à l'algèbre de polynômes $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_{\dim V}]$). Comme V est associé à la composante homogène de degré un de cet espace de polynômes, et comme par définition cet espace est stable par les transformations linéaires de V , $\mathcal{S}(V)$ est naturellement une algèbre graduée. Une propriété universelle et caractéristique de $\mathcal{S}(V)$ est la suivante: c'est une algèbre commutative et associative avec unité qui contient V , et toute application linéaire de V dans une algèbre commutative et associative avec unité \mathcal{A} a une extension unique comme homomorphisme d'algèbre de $\mathcal{S}(V)$ dans \mathcal{A} (voilà pour l'aspect intrinsèque). Alors les endomorphismes de la représentation portée par V s'étendent de manière unique comme homomorphismes de $\mathcal{S}(V)$. En particulier $\mathcal{S}(V)$ porte une représentation de G , et nous sommes intéressés par le sous espace de $\mathcal{S}(V)$ laissé invariant par G noté $Inv(V)$. C'est en fait un sous-anneau de $\mathcal{S}(V)$ ce qui fait de $\mathcal{S}(V)$ un $Inv(V)$ -module (c'est à dire que $Inv(V)$ agit sur $\mathcal{S}(V)$ par multiplication). Remarquons que $Inv(V)$ est lui aussi un anneau gradué. L'opération consistant à prendre des moyennes sur le groupe est un outil fondamental. On se souvient que c'est elle qui permet à partir d'une structure quelconque d'espace de Hilbert sur V d'en induire une nouvelle faisant de la représentation une représentation unitaire. Nous allons utiliser ici cette moyenne à des fins différentes. Considérons l'application suivante

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}: \mathcal{S}(V) & \rightarrow & \mathcal{S}(V) \\ P & \rightarrow & \mathcal{M}(P) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} gP \end{array}$$

où $|G|$ est le cardinal de G . Il est facile de vérifier que \mathcal{M} est linéaire et respecte la graduation, que l'image de \mathcal{M} est $Inv(V)$, que \mathcal{M} est une projection ($\mathcal{M}^2 = \mathcal{M}$) et enfin que \mathcal{M} est un homomorphisme de $Inv(V)$ -modules (ce qui signifie simplement que si $P \in Inv(V)$ et $Q \in \mathcal{S}(P)$ alors $\mathcal{M}(PQ) = P\mathcal{M}(Q)$)

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème fondamental de la théorie des invariants: si V est de dimension finie, l'anneau $Inv(V)$ a un nombre fini de générateurs.

Rappelons d'abord qu'un module sur un anneau commutatif unitaire A est le strict analogue pour un anneau de ce qu'est un espace vectoriel sur un corps. De manière plus abstraite un A -module M est un groupe additif sur lequel A agit par des homomorphismes (du groupe additif M) de telle sorte que M soit un espace de représentation de A . Si A est non commutatif il y a des modules à droite et à gauche, mais nous n'avons besoin que d'anneaux commutatifs. Comme dans le cas des corps on définit les sous-modules. L'intersection de deux sous-modules en est encore un, donc on peut parler du plus petit sous-module contenant une partie donnée S

de M . On vérifie qu'il contient exactement les combinaisons linéaires finies à coefficients dans A des éléments de S . Si le sous-module associé à S est M tout entier on dit que S est une partie génératrice de M . Si une combinaison linéaire à coefficients dans A d'éléments de S n'est nulle que si tout les coefficients sont nuls on dit que S est une partie libre de M . La différence essentielle avec la théorie des espaces vectoriels concerne l'existence de bases (c'est à dire de parties à la fois libres et génératrices), qui n'est pas du tout garantie. Un A -module ayant une base est dit libre. On peut grâce à une base se représenter un A -module libre comme une somme directe de copies de A . Il est clair que A est lui même un A -module, et ses sous-modules sont appelés des idéaux. On dit d'un anneau qu'il est noethérien si ses parties finies engendrent tous ses idéaux. Il est clair qu'un corps est un anneau noethérien, de même que Z (qui est principal, les singletons de Z engendrent tous les idéaux).

Hilbert a démontré le théorème suivant: l'anneau des polynômes à coefficients dans un anneau noethérien est lui aussi noethérien. Par récurrence si V est de dimension finie on en déduit que $\mathcal{S}(V)$ est un anneau noethérien. Maintenant considérons \mathcal{I} l'idéal de $\mathcal{S}(V)$ engendré par les éléments de $Inv(V)$ sans terme constant (c'est à dire par les polynômes homogènes de degré strictement positif). D'après le théorème de Hilbert \mathcal{I} est engendré en tant qu'idéal par une partie finie S de $Inv(V)$. Il est clair que \mathcal{I} contient $Inv(V)$, donc tout élément P de $Inv(V)$ sans terme constant se laisse représenter comme une combinaison linéaire d'éléments de S à coefficients dans $\mathcal{S}(V)$. Il suffit d'appliquer \mathcal{M} à cette représentation pour montrer qu'en fait les coefficients peuvent être choisis dans $Inv(V)$. Mais ces coefficients sont de degré strictement inférieur à celui de P . Ceci permet de démontrer par l'absurde que tous les éléments de $Inv(V)$ sont des polynômes dans les éléments de S , ce qui démontre que si S engendre \mathcal{I} en tant qu'idéal, il engendre $Inv(V)$ en tant qu'anneau. Ceci démontre le théorème fondamental. La preuve que nous avons donnée est due elle aussi à Hilbert (on consultera avec profit la référence [49]), elle se généralise instantanément aux groupes compacts (on prend les moyennes avec la mesure invariante de Haar). Dans le cas des groupes finis il existe une preuve plus élémentaire due à Emmy Noether.

7.1.2 Détour par les syzygies

Mentionnons encore brièvement un théorème (toujours dû à Hilbert) qui permet de mieux comprendre la structure des invariants.

Considérons $R = \mathbf{C}[Y_1, \dots, Y_n]$ l'anneau des polynômes en n variables à coefficients dans \mathbf{C} . Soit M un R -module ayant un nombre fini de générateurs (rappelons que ceci signifie qu'il existe une partie finie S de M telle que le plus petit sous-module de M contenant S soit M tout entier). On choisit S de cardinal minimal et on considère F le module libre sur R dont une base (c'est de l'existence d'une telle base c'est à dire d'une décomposition unique d'un élément de F comme combinaison linéaire des éléments de cette base à coefficients dans R que vient l'expression module libre) est indexée par les éléments de S . L'application qui à un élément u_s ($s \in S$) de la base de F associe s se prolonge de manière unique en un homomorphisme (surjectif) de R -modules, son noyau N est un sous-module de F . Nous allons voir que N a un nombre fini de générateurs. Montrons le par récurrence sur le cardinal de S . Si S est un singleton les éléments de N sont proportionnels à u où $\{u\}$ est la base de F . Comme N est un R -module il est clair que $\{P \in R \text{ tels que } Pu \in N\}$ est un idéal de R , qui est noethérien. Donc

cet idéal a un nombre fini de générateurs et N aussi. Si S a l éléments on fait le raisonnement suivant: tout élément de N s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_1^l P_i u_i$ et l'ensemble des P_i qui apparaissent (comme coefficient de u_i) dans la décomposition d'au moins un élément de N forment un idéal de R , il a un nombre fini de générateurs, et on peut associer à chacun un élément de N dont le coefficient de u_i soit le générateur correspondant. Ces éléments de N engendrent un certain sous-module N' de N et tout élément de N peut se décomposer (pas forcément de manière unique) comme somme d'un élément de N' et d'un élément de N'' sous-module de N formés des éléments dont la composante sur u_i est nulle. Comme N'' est un sous-module d'un module libre à $l - 1$ générateurs, le théorème à l'ordre l est conséquence du théorème à l'ordre $l - 1$ (on adjoint aux générateurs de N'' , qu'on peut choisir en nombre fini d'après l'hypothèse de récurrence, ceux qu'on vient de construire pour N') et ceci achève la preuve. On peut alors appliquer à N l'opération qu'on vient d'appliquer à M , c'est à dire prendre un nombre minimal de générateurs dans N et représenter N comme quotient d'un module libre. On définit alors de proche en proche une famille de suites exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & N^1 & \rightarrow & F^0 & \rightarrow & M & \rightarrow & 0 \\ 0 & \rightarrow & N^2 & \rightarrow & F^1 & \rightarrow & N^1 & \rightarrow & 0 \\ & & & & \dots & & & & \\ 0 & \rightarrow & N^{k+1} & \rightarrow & F^k & \rightarrow & N^k & \rightarrow & 0 \\ & & & & \dots & & & & \end{array}$$

où les F^k sont des modules libres. On appelle N^k la $k^{\text{ième}}$ syzygie de M . Le théorème de Hilbert (appelé théorème syzygie) dit que N^n est un R -module libre ce qui entraîne que $N^k = \{0\}$ pour $k > n + 1$. Donc la famille de suites exactes ci-dessus devient triviale à partir du rang $n + 1$ et on obtient pour M la suite exacte suivante

$$0 \rightarrow F^n \rightarrow F^{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F^0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

qu'en termes techniques on appelle une résolution libre (car les F^k sont des-modules libres) et qui est un des outils fondamentaux pour calculer diverses cohomologies.

On peut encore compléter ceci. On peut associer à chaque indéterminée Y_k un degré (entier strictement positif arbitraire) et le degré zéro aux constantes. Ceci fait de R un anneau gradué $R = \oplus_i R_i$. Si M est un R -module gradué (c'est à dire $M = \oplus_i M_i$ avec $R_i M_j \subset M_{i+j}$) en décomposant les générateurs de M en leurs composantes homogènes on obtient encore un système fini de générateurs, et on peut donc choisir dans M un système minimal de générateurs homogènes. On construit alors F et N comme précédemment, la remarque intéressante étant que F mais aussi N sont des R -modules gradués (on prend pour degrés des générateurs de F les degrés correspondants dans M) et que l'isomorphisme entre F/N et M se décompose en une famille d'isomorphismes entre F_i/N_i et M_i .

Nous allons appliquer ce théorème dans le cas particulier où n est le nombre minimal de générateurs homogènes de l'anneau $Inv(V)$ dont nous avons vu qu'il est naturellement gradué. Notons y_1, \dots, y_n ces générateurs. Alors il existe un unique homomorphisme d'algèbres κ de R dans $Inv(V)$ associant Y_k à y_k (à un polynôme dans les Y_k il associe le même polynôme dans les y_k), il est surjectif car les y_k engendrent $Inv(V)$ et fait de $Inv(V)$ un R -module (si $P \in R$ et $Q \in Inv(V)$ on définit $P(Q)$, action de P sur Q , par $\kappa(P)Q$, multiplication dans $Inv(V)$).

En tant que R -module, $Inv(V)$ est engendré par son unité. On transfère sur R la graduation de $Inv(V)$. Nous pouvons donc appliquer le théorème syzygie de Hilbert avec $M = Inv(V)$. La première syzygie décrit les relations entre les générateurs de $Inv(V)$, la seconde les relations entre ces relations, et ainsi de suite. Le théorème nous dit que ce processus s'arrête en un nombre fini d'étapes.

7.1.3 La fonction génératrice de Poincaré

Mentionnons encore un outil très utile pour l'étude des invariants. Nous conservons les notations précédentes et supposons que R et M sont gradués. Considérons la série formelle dite de Poincaré

$$\chi_M(t) = \sum_i t^i \dim M_i$$

Nous allons montrer que ceci est bien défini (c'est à dire que les $\dim M_i$ sont finies) et se resomme en une fraction rationnelle ayant tous ses pôles sur le cercle unité. Pour cela commençons par montrer que les $\dim F_i$ sont finies (alors les $\dim M_i$ sont aussi finies car M_i est un quotient de F_i). Mais il est élémentaire de calculer explicitement $\chi_F(t)$. Chaque F_i est de dimension finie car les degrés des générateurs de R sont strictement positifs, et la sommation donne (d désigne le degré)

$$\chi_F(t) = \frac{\sum_{s \in S} t^{d(u_s)}}{\prod_{k=1}^n (1 - t^{d(Y_k)})}$$

ce qui est bien une fraction rationnelle avec les pôles sur le cercle unité. Le résultat que nous annonçons est donc vrai pour les R -modules gradués libres à un nombre fini de générateurs, et ceci entraîne l'existence de la série de Poincaré pour tous les modules gradués à un nombre fini de générateurs (en particulier toutes les syzygies de M). Mais F_i/N_i et M_i sont isomorphes donc $\chi_F = \chi_N + \chi_M$. En appliquant ceci à la résolution de M on obtient

$$\chi_M = \sum (-1)^k \chi_{F^k}$$

où le membre de droite est une somme finie de fractions rationnelles ayant leurs pôles sur le cercle unité donc le membre de gauche possède la même propriété, ce qui conclut la preuve. Dans les cas particulier, il est souvent plus rapide de faire un calcul direct de χ_M que d'utiliser une résolution. Considérons par exemple le cas suivant: soit $n = r + s$, posons $Z_l = Y_{l+r}$ pour $1 \leq l \leq s$, et intéressons-nous à l'idéal N de R engendré par s polynômes homogènes sans facteurs communs Q_l , $1 \leq l \leq s$, où Q_l ne dépend que de Y_1, \dots, Y_r et Z_l . Posons $M = R/N$ (R est bien un R -module libre à un générateur, son unité par exemple). Le calcul direct de χ_M est immédiat du fait de l'absence de facteurs communs et on trouve

$$\chi_M = \frac{\prod_{l=1}^s (1 - t^{d(Q_l)})}{\prod_{k=1}^r (1 - t^{d(Y_k)}) \prod_{l=1}^s (1 - t^{d(Z_l)})}$$

Cette forme suggère en fait la structure de la résolution associée. Par exemple on voit clairement que si F^1 est le R -module libre de base u_1, \dots, u_s associé à N la première syzygie de N (c'est à dire la deuxième de M) est engendrée par les éléments $Q_k u_l - Q_l u_k$ pour $1 \leq k < l \leq s$. Remarquons enfin que χ_M a un pôle d'ordre R en $t = 1$.

Le calcul que nous venons de faire a l'application suivante: d'après ce qui précède une \mathbf{C} algèbre graduée à un nombre fini de générateurs homogènes de degrés strictement positifs \mathcal{A} possède une série de Poincaré dont l'ordre du pôle au point 1 est égal au nombre maximum d'éléments algébriquement indépendants qu'elle contient. En effet si tous les éléments de \mathcal{A} sont algébriques en y_1, \dots, y_r (supposés homogènes) on complète cet ensemble avec z_1, \dots, z_s (homogènes) pour faire un système de générateurs de \mathcal{A} , on interprète alors \mathcal{A} comme un R -module, on choisit pour les Q_i des relations vérifiées dans \mathcal{A} , ce qui fait que la surjection de R dans \mathcal{A} se factorise avec R/N comme intermédiaire. Alors la série de Poincaré de \mathcal{A} est majorée par celle de R/N , elle a donc au plus un pôle d'ordre r en $t = 1$. De plus, si y_1, \dots, y_r sont algébriquement indépendants dans \mathcal{A} , la série de Poincaré de l'algèbre qu'ils engendrent (majorée par celle de \mathcal{A}) a un pôle d'ordre r en $t = 1$. Ceci prouve le résultat.

Il est temps de revenir à la théorie des invariants pour donner une forme explicite de la série de Poincaré de $Inv(V)$. Nous supposons V de dimension finie. Nous avons défini une opération de moyenne sur toute représentation du groupe fini G , et en particulier sur V et $Inv(V)$. Cette opération est en fait un projecteur sur les invariants, elle respecte la graduation ce qui entraîne que la dimension de l'espace des invariants de degré i est simplement la trace de la restriction de \mathcal{M} au degré I . Fixons un élément g de G , représenté par l'endomorphisme U_g de V , et choisissons une base de V dans laquelle g agit diagonalement (c'est possible car pour une structure hilbertienne appropriée sur V g agit unitairement). Un calcul simple montre que la fonction génératrice des traces de g agissant sur l'espace de degré i est

$$\sum_i t^i \sum_{i_1 + \dots + i_{dim V} = 1} \lambda_1^{i_1} \dots \lambda_{dim V}^{i_{dim V}}$$

où les λ sont les valeurs propres de U_g . Mais ceci vaut simplement $\det(1 - tU_g)^{-1}$, ce qui implique que

$$\chi_{Inv(V)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(1 - tU_g)}$$

ce qui se décompose pour isoler le terme le plus singulier au voisinage de $t = 1$

$$\chi_{Inv(V)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G, U_g = 1} \frac{1}{t^{dim V}} + \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G, U_g \neq 1} \frac{1}{\det(1 - tU_g)}$$

qui est bien comme annoncé une fraction rationnelle dont les pôles sont sur le cercle unité. On remarque que lorsque t tend vers 1, $\chi_{Inv(V)}$ a un pôle d'ordre $dim V$. Ceci assure que dans $Inv(V)$ les familles algébriquement indépendantes maximales ont exactement $dim V$ polynômes. Si l'on considère alors la variété algébrique associée à la première syzygie de $Inv(V)$ (rappelons que cette première syzygie code les relations (polynomiales) vérifiées par les invariants, et ces relations définissent une variété algébrique), on constate que hors des points de V laissés fixes par des transformations non triviales U_g , les points de V/G donnent des coordonnées locales sur cette variété. Cette variété algébrique peut avoir des singularités à l'origine, et nous effleurons ce sujet dans la suite.

Mentionnons enfin un théorème profond et difficile que nous ne démontrerons pas: L'anneau des invariants d'une représentation de dimension finie sur V d'un groupe fini G a la propriété de Cohen-Macaulay (la définition est un peu technique, voir [19]) et en particulier

peut être décomposé de la manière suivante: on peut choisir dans $Inv(V)$ $dimV$ polynômes algébriquement indépendants y_1, \dots, y_{dimV} , et un certain nombre (fini) de polynômes auxiliaires u_s , $s \in S$, de telle sorte que $Inv(V)$ soit un $\mathbf{C}[y_1, \dots, y_{dimV}]$ -module libre dont les u_s forment une base. En conséquence le polynôme de Poincaré de $Inv(V)$ est de la forme

$$\chi_{Inv(V)}(t) = \frac{\sum_{s \in S} t^{d(u_s)}}{\prod_{k=1}^{dimV} (1 - t^{d(Y_k)})}$$

Pour clore cette discussion un peu aride, rappelons que si le groupe G est le groupe des permutations de n objets, la structure de l'anneau des invariants pour la représentation usuelle de dimension n est très simple. Les polynômes invariants fondamentaux sont les polynômes symétriques élémentaires, ils sont algébriquement indépendants. On a pu faire la liste de tous les groupes finis ayant cette propriété, elle contient essentiellement les groupes de Weyl des algèbres de Lie semi-simples, plus quelques groupes eux aussi très intéressants. Dans ce cas la série de Poincaré est l'inverse d'un polynôme.

7.2 Quelques classifications ADE

Après ce long détour, nous pouvons maintenant en venir au point central de ce chapitre. De nombreux objets mathématiques apparemment très différents ont une classification commune, nous voulons parler de la classification des algèbres de Lie simplement lacées. Nous allons mentionner très (trop?) brièvement diverses branches où cette classification intervient, ceci dans le but d'insister sur le fait que cette similitude de classification a souvent des racines (c'est le cas de le dire en parlant d'algèbres de Lie simples!) profondes.

7.2.1 Les algèbres de Lie simplement lacées

A tout seigneur tout honneur, nous commençons par la classification qui donne son nom à toutes les autres. Sans entrer dans les détails rappelons que Cartan a classifié les algèbres de Lie simples sur \mathbf{C} . Elles sont en correspondance biunivoque (voir par exemple [43] ou [18]) avec les systèmes de racines irréductibles, donc finalement avec les diagrammes de Dynkin connexes qui caractérisent ces systèmes de racines. Les algèbres de Lie simples sont également caractérisées par la donnée de leurs exposants, qu'on peut définir de multiples façons; par exemple en leur ajoutant 1 on obtient les degrés des invariants fondamentaux pour la représentation du groupe de Weyl de l'algèbre de Lie dont nous parlions à la fin de la section précédente, on peut montrer alors que ce sont aussi les degrés des éléments qui engendrent le centre de l'algèbre enveloppante, d'où leur lien avec les formes différentielles invariantes et la possibilité d'une définition cohomologique de ces exposants. Parmi les algèbres de Lie simples certaines sont obtenues à partir d'autres en faisant agir un automorphisme extérieur. Les algèbres qui permettent ainsi de construire toutes les autres sont celles dont toutes les racines ont la même longueur, elles sont dites simplement lacées. Elles contiennent les algèbres de Lie classiques A_l (reliées aux transformations unitaires spéciales en dimension $l + 1$) et D_l (reliées aux rotations en dimension $2l$), et les algèbres exceptionnelles E_6 , E_7 et E_8 .

7.2.2 Les sous-groupes finis de $SU(2)$

J. McKay ([30]) a observé la correspondance étrange suivante, qui a motivé également d'importants travaux de B. Kostant ([26]). Considérons un sous-groupe fini G de $SU(2)$ (c'est le double recouvrement d'un des célèbres groupes platoniciens), il a un nombre fini de représentations irréductibles non équivalentes, que nous notons γ_0 (la représentation triviale), $\gamma_1, \dots, \gamma_l$. Si γ est la représentation de dimension 2 de G venant de son plongement dans $SU(2)$, on peut définir une matrice à coefficients entiers positifs par $\gamma \otimes \gamma_i = \sum_j A(G)_{ij} \gamma_j$. Cette matrice est symétrique, c'est la matrice d'incidence d'un graphe qui est le diagramme de Dynkin d'une algèbre de Kač-Moody (non twistée) associée à une algèbre de Lie simplement lacée. En enlevant le noeud correspondant à γ_0 on obtient le diagramme de Dynkin de l'algèbre elle-même. Les dimensions des représentations de G sont codées dans certaines données numériques associées à l'algèbre de Kač-Moody. Mais il y a mieux: si l'on décompose les représentation irréductibles de $SU(2)$ en représentations irréductibles de G , désignant par R_k la représentation de dimension k de $SU(2)$, on a $R_k = \sum_i v(i)_k \gamma_i$. Comme on a mis en correspondance les représentations irréductibles de G avec les racines simples d'une algèbre de Kač-Moody on peut associer à la décomposition ci-dessus un élément du réseau des racines de l'algèbre de Kač-Moody pour chaque k et on peut alors montrer que la suite de vecteurs ainsi définie est en fait l'orbite du premier d'entre eux sous l'action d'un élément très particulier (dit de Coxeter) du groupe de Weyl affine ([26]). Les sommes $\sum_k v(i)_k t^k$ sont des fractions rationnelles, les dénominateurs sont des polynômes et les degrés des monômes qui apparaissent sont liés (mais pas de façon vraiment précise) aux exposants de l'algèbre de Lie associée. Pour citer Kostant, "les sous-groupes finis de $SU(2)$ voient de manière profonde et précise les groupes de Lie simples de toutes dimensions". Il n'est pas trop difficile de calculer explicitement les invariants pour la représentation de dimension 2 de ces sous-groupes finis de $SU(2)$. La réponse est toujours que $Inv(V)$ est engendré par trois éléments vérifiant une seule relation algébrique (il n'y a qu'une syzygie non triviale). La variété décrite par cette relation à une singularité isolée à l'origine. Par exemple pour le double recouvrement du groupe de symétrie de l'icosaèdre, les trois polynômes générateurs homogènes X, Y , et Z de degrés respectifs 12, 20 et 30 vérifient

$$X^5 + Y^3 + Z^2 = 0$$

Notons l'existence de travaux récents cherchant à comprendre s'il existe une généralisation de cette correspondance pour des groupes autres que $SU(2)$.

7.2.3 Les singularités simples

La théorie des singularités analytiques ou algébriques est un sujet bien trop complexe pour pouvoir être décrit, même de la manière imprécise à laquelle le lecteur est maintenant habitué, en quelques lignes. Mentionnons simplement que des conditions de stabilité ([1, 44]) définissent une classe de singularités qui sont exactement celles associées aux anneaux d'invariants des sous-groupes finis de $SU(2)$.

Notons que la singularité permet de remonter à G (qui apparait comme un objet appelé groupe fondamental local au voisinage de la singularité), et donnons deux exemples montrant que la singularité code aussi des données concernant l'algèbre de Lie. Si X, Y et Z engendrent l'anneau des invariants, avec une unique relation $P(X, Y, Z) = 0$, considérons l'idéal I de

$\mathbf{C}[X, Y, Z]$ engendré par $\partial P/\partial X$, $\partial P/\partial Y$ et $\partial P/\partial Z$. C'est un idéal engendré par des éléments homogènes donc l'anneau quotient $\mathbf{C}[X, Y, Z]/I$ est gradué. A certains degrés (par exemple les degrés impairs) il n'y a plus de polynômes dans le quotient, mais, si l'on divise les degrés des polynômes du quotient par 2 et que l'on ajoute 1, on trouve les exposants de l'algèbre de Lie associée. Reprenant le cas de l'icosaèdre, on travaille modulo Z , Y^2 et X^4 , les classes ont pour représentants $1, X, Y, X^2, XY, X^3, YX^2, YX^3$ ce qui donne pour les degrés +1 les valeurs 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29, qui sont bien les exposants de E_8 .

On peut aussi retrouver le diagramme de Dynkin à partir de la singularité. L'outil essentiel est la résolution des singularités dont nous allons donner l'idée générale et une application concrète à notre problème. L'idée fondamentale est la suivante: imaginons une courbe plane ayant un point multiple à l'origine, avec des tangentes distinctes. A chaque point de la courbe on associe non seulement ses coordonnées, mais également des coordonnées de la droite passant par ce point et par l'origine. Hors de l'origine la donnée du point sur la courbe détermine la droite, mais lorsqu'on approche l'origine sur une branche donnée de la courbe, la droite tend vers la tangente et ceci permet de différencier les branches au voisinage de l'origine donc de désingulariser la courbe. L'outil mathématique approprié est le dévissage (voir par exemple [17] où ceci s'appelle un 'blowing-up' ou [41] où ceci s'appelle un ' σ -Process'). Pour étudier les singularités à l'origine d'un objet plongé dans \mathbf{C}^n on fait 'éclater' l'origine de la façon suivante: si (x_1, \dots, x_n) sont des coordonnées pour \mathbf{C}^n et $(y_1; \dots; y_n)$ des coordonnées homogènes pour \mathbf{CP}^{n-1} on définit $\mathbf{\Pi}^n$ comme l'ensemble des points de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{CP}^{n-1}$ tels que $x_i y_j = x_j y_i$ pour $i < j$. On se convainc facilement que la projection sur le premier facteur de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{CP}^{n-1}$ dans \mathbf{C}^n donne lieu à une application surjective de $\mathbf{\Pi}^n$ dans \mathbf{C}^n , et que l'image réciproque d'un point non nul est un unique point de $\mathbf{\Pi}^n$, alors que l'image réciproque de l'origine est \mathbf{CP}^{n-1} . On voit donc que $\mathbf{\Pi}^n$ est semblable à \mathbf{C}^n , sauf à l'origine, où $\mathbf{\Pi}^n$ code les hyperplans passant par ce point. Dans la suite nous appelons (ceci n'est pas forcément la terminologie standard) variété algébrique l'ensemble des zéros complexes d'une famille de polynômes à un nombre donné de variables (attention, une variété algébrique peut avoir des singularités, ce n'est pas en général une variété au sens de la géométrie différentielle), en imposant éventuellement des conditions d'homogénéité pour certaines d'entre elles, ce qui fait qu'une variété est naturellement un sous ensemble d'un produit d'espaces affines et projectifs sur \mathbf{C} . Une variété algébrique sera dite réductible si elle est réunion de plusieurs variétés algébriques (pas forcément disjointes) deux à deux non incluses l'une dans l'autre. Un théorème classique assure que toute variété algébrique est de manière unique réunion d'un nombre fini de variétés algébriques irréductibles. Voyons comment le dévissage permet de désingulariser certaines variétés algébriques singulières à l'origine. L'image réciproque d'un tel objet noté \mathcal{V} par le dévissage n'est en général pas irréductible, car il peut se décomposer comme d'une part l'ensemble des zéros d'une nouvelle famille de polynômes qui définissent une variété algébrique \mathcal{V}' (la correspondance entre \mathcal{V}' et \mathcal{V} est biunivoque sauf à l'origine) et d'autre part l'image réciproque de l'origine par le dévissage, qui s'identifie à \mathbf{CP}^{n-1} . On appelle \mathcal{V}' la transformée de \mathcal{V} par le dévissage, elle se projette naturellement sur \mathcal{V} . Si \mathcal{V}' a encore des singularités on peut recommencer, et dans des cas favorables des théorèmes assurent qu'en un nombre fini d'étapes on obtient une variété algébrique non singulière. Donnons deux exemples concrets.

Considérons le sous-groupe de $SU(2)$ formé des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix}$ où ξ est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité. Si u et v sont les coordonnées dans \mathbf{C}^2 les polynômes $x_1 = u^n$, $x_2 = -v^n$ et $x_3 = uv$ engendrent l'anneau des invariants et satisfont à l'unique relation $S : x_1 x_2 + x_3^n = 0$. L'ensemble des points vérifiant cette relation dans \mathbf{C}^3 a un point singulier à l'origine. Les exposants associés sont ceux de A_{n-1} (vérification immédiate). Commençons par le cas $n = 2$. On vérifie sans peine que la surface irréductible dans \mathbf{B}^3 qui se projette sur S (la correspondance étant bijective en dehors de l'origine) a pour équations

$$y_1 y_2 + y_3^2 = 0 \quad x_1 y_2 = x_2 y_1 \quad x_1 y_3 = x_3 y_1 \quad x_2 y_3 = x_3 y_2$$

et cette variété n'est plus singulière. L'image réciproque de l'origine est la partie de \mathbf{CP}^2 vérifiant $y_1 y_2 + y_3^2 = 0$. L'application de \mathbf{CP}^1 dans \mathbf{CP}^2 définie par $y_1 = u^2$, $y_2 = -v^2$, $y_3 = uv$ identifie l'image réciproque de l'origine avec \mathbf{CP}^1 en tant que variété algébrique. Donc l'image réciproque de l'origine dans le dévissage est une sphère. Nous pouvons maintenant passer au cas $n = 3$ (le cas $n = 2$ est laissé au lecteur). La surface irréductible dans \mathbf{B}^3 qui se projette sur S (la correspondance étant bijective en dehors de l'origine) a pour équations

$$y_1 y_2 + y_3^2 x_3^2 = 0 \quad x_1 y_2 = x_2 y_1 \quad x_1 y_3 = x_3 y_1 \quad x_2 y_3 = x_3 y_2$$

et cette variété est encore singulière à l'origine. On recommence alors le dévissage, et on obtient une nouvelle surface irréductible dont les équations sont

$$z_1 z_2 + z_3^2 = 0 \quad y_1 z_2 = y_2 z_1 \quad y_1 z_3 = x_3 y_3 z_1 \quad y_2 z_3 = x_3 y_3 z_2 \\ x_1 y_2 = x_2 y_1 \quad x_1 y_3 = x_3 y_1 \quad x_2 y_3 = x_3 y_2$$

où $(z_1; z_2; z_3)$ sont à nouveau des coordonnées homogènes dans \mathbf{CP}^2 . Cette variété n'a plus de singularité à l'origine, et l'image réciproque de l'origine ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$) est une variété ayant pour équations

$$z_1 z_2 + z_3^2 = 0 \quad y_1 z_2 = y_2 z_1 \quad y_1 z_3 = 0 \quad y_2 z_3 = 0$$

Cette variété n'est pas irréductible, mais nous allons trouver ses composantes irréductibles. Comme nous l'avons vu la première équation définit une sphère dont les coordonnées homogènes sont u et v . Il reste alors les équations $y_1 v^2 + y_2 u^2 = 0$ $y_1 uv = 0$ $y_2 uv = 0$. Elles décrivent dans $\mathbf{CP}^2 \times \mathbf{CP}^1$ la réunion des trois ensembles algébriquement équivalents à des sphères

$$(0; 0; 1) \times (u; v) \quad (0; y_2; y_3) \times (0; 1) \quad \text{et} \quad (y_1; 0; y_3) \times (1; 0)$$

Les deux dernières sphères n'ont pas de point commun, mais la première et la seconde se rencontrent en $(0; 0; 1) \times (0; 1)$ et la première et la troisième se rencontrent en $(0; 0; 1) \times (1; 0)$. Si l'on dessine un graphe dont les sommets sont ces trois sphères et dont les arêtes relient les sphères ayant un point d'intersection, on obtient le diagramme de Dynkin de A_3 . On peut montrer en général que pour la classe de singularités concernée il se produit le même phénomène: après un nombre fini de dévissages on arrive à une surface non singulière, dont les points sont en correspondance biunivoque avec les points de la surface de départ, sauf à l'origine. L'image réciproque de l'origine peut se décomposer comme une réunion (pas forcément disjointe) de variétés algébriques irréductibles, il se trouve que ces variétés sont des sphères \mathbf{CP}^1 , et on peut dessiner un diagramme codant leurs intersections. On obtient le diagramme de Dynkin de l'algèbre de Lie associée.

7.2.4 Les invariants modulaires pour $su(2)$

Au chapitre 6, nous avons obtenu une famille génératrice du commutant. Cependant la complexité des expressions et l'existence de relations rendent impossible pour l'instant l'exploration systématique des contraintes issues des repliements par le groupe de Weyl. Dans le cas de $su(2)$ il se trouve que la famille génératrice construite est en fait une base, et le groupe de Weyl est assez simple pour faire l'étude exhaustive des invariants modulaires. On sait que les matrices Ω définies par (6.12) engendrent le commutant, de plus si $\alpha\alpha' = n$ on vérifie que

$$\langle \alpha' + \alpha | \Omega_\delta | \alpha' - \alpha \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \delta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui implique d'une part que les matrices Ω_δ sont linéairement indépendantes, d'autre part qu'elles forment une base du commutant en tant que \mathbf{Z} -module et pas seulement en tant que \mathbf{Q} -espace vectoriel. Rappelons maintenant que les caractères sont numérotés par un entier λ compris entre 1 et $n - 1$, et que nous avons formellement définis les caractères pour tous les indices entiers par $\chi_\lambda = \chi_{\lambda+2n} = -\chi_{-\lambda}$. On cherche alors les combinaisons des matrices Ω qui agissant sur les vrais caractères donnent des combinaisons linéaires à coefficients entiers positifs des vrais caractères. Déterminer toutes les solutions est assez difficile, mais le résultat final (inattendu) est une nouvelle classification *ADE* due à Cappelli, Itzykson et Zuber ([3]). Donnons la forme explicite des invariants modulaires:

$n \geq 2$	$\sum_{\lambda=1}^{n-1} \chi_\lambda ^2$	A_{n-1}	Ω_n
$n = 4n' + 2$ $n' \geq 1$	$\sum_{\lambda=1}^{n'} \chi_{2\lambda-1} + \chi_{n+1-2\lambda} ^2 + 2 \chi_{2n'+1} ^2$	$D_{2n'+2}$	$\Omega_n + \Omega_2$
$n = 4n'$ $n' \geq 2$	$\sum_{\lambda=1}^{2n'} \chi_{2\lambda-1} ^2 + \chi_{2n'} ^2 + \sum_{\lambda=1}^{n'-1} (\chi_{2\lambda}\bar{\chi}_{n-2\lambda} + \text{c.c.})$	$D_{2n'+1}$	$\Omega_n + \Omega_2$
$n = 12$	$ \chi_1 + \chi_7 ^2 + \chi_4 + \chi_8 ^2 + \chi_5 + \chi_{11} ^2$	E_6	$\Omega_{12} + \Omega_3 + \Omega_2$
$n = 18$	$ \chi_1 + \chi_{17} ^2 + \chi_5 + \chi_{13} ^2 + \chi_7 + \chi_{11} ^2 + \chi_9 ^2$ $+ [(\chi_3 + \chi_{15})\bar{\chi}_9 + \text{c.c.}]$	E_7	$\Omega_{18} + \Omega_3 + \Omega_2$
$n = 30$	$ \chi_1 + \chi_{11} + \chi_{19} + \chi_{29} ^2$ $+ \chi_7 + \chi_{13} + \chi_{17} + \chi_{23} ^2$	E_8	$\Omega_{30} + \Omega_5 + \Omega_3 + \Omega_2$

L'essence de la correspondance vient de la remarque que les indices des caractères apparaissant dans des modules carrés ne sont autres que les exposants de l'algèbre de Lie associée, pris avec leur multiplicité. Notons que les indices affectant les matrices Ω ont une interprétation en termes de la singularité associée ([24, 45]), hélas les objets affectés naturellement de ces indices dans l'étude des singularités ne sont pas des matrices. On peut vérifier aussi que le groupe modulaire agit sur les deux blocs de l'invariant modulaire associé à E_8 comme un de ses quotients isomorphe au groupe de l'icosaèdre, mais ceci ne marche pas dans les autres cas.

Remarquons finalement que les fonctions de partition des modèles minimaux unitaires ont une classification par une paire d'algèbres de Lie simplement lacées (l'une d'elles est toujours une algèbre A), ceci venant du fait qu'ils sont obtenus à partir de $su(2)$ par la construction quotient.

7.2.5 Modèles intégrables et graphes

Nous avons parlé au chapitre 4 de modèles de mécanique statistique dont les variables de configuration prennent leurs valeurs dans des graphes (non orientés). A partir d'un tel graphe on construit une matrice d'incidence (symétrique) de la manière habituelle, et d'après le théorème de Perron-Frobenius, sa valeur propre de plus grand module est réelle positive, non dégénérée et le vecteur propre correspondant a toutes ses composantes d'un même signe. Ces composantes permettent de définir des poids de Boltzmann pour un modèle intégrable, dont on montre qu'il a une transition de phase du second ordre si et seulement si la valeur propre est plus petite que 2. Ces graphes peuvent être classés. Ceux dont la plus grande valeur propre est 2 sont ceux des algèbres de Kač-Moody associées aux algèbres de Lie simplement lacées, ceux dont la plus grande valeur propre est strictement plus petite que 2 sont ceux des algèbres de Lie simplement lacées. On peut montrer qu'au point critique ces modèles intégrables sont décrits par une théorie conforme minimale unitaire dont la fonction de partition est bien associée à la même algèbre de Lie ([33]). Remarquons que dans ces cas les composantes du vecteur de Perron-Frobenius codent les exposants.

7.2.6 Perspectives

Les divers points communs entre ces diverses classifications *ADE* sont très suggestifs et de nombreuses conjectures naturelles quant à la généralisation aux invariants modulaires pour $su(N)$ $N > 2$ viennent rapidement à l'esprit. Les invariants de $su(N)$ seraient-ils en correspondance biunivoque avec les sous-groupes finis de $SU(N)$? Et pour quelles raisons? En agissant avec la représentation de dimension N naturelle d'un sous-groupe fini de $SU(N)$ sur l'algèbre de ses représentations irréductibles on peut obtenir des graphes, orientés cette fois ci, dont on pourrait penser qu'ils sont associés à des modèles intégrables décrits au point critique par des théories quotient. De même la singularité associée à l'anneau des invariants pourrait être résolue par des dévissages, l'image réciproque de l'origine décomposée en composantes irréductibles dont les indices d'intersection donneraient de nouveaux graphes plus compliqués, dont il n'est pas évident qu'ils soient orientés et qu'ils coïncident avec les précédents. D'une certaine manière la dualité entre $su(m)_n$ et $su(n)_m$ est assez décourageante car les sous-groupes ne sont pas du tout les mêmes, mais ceci est peut-être une remarque trop naïve. Diverses approches très intéressantes ont été poursuivies, mais aucune n'a donné de résultats vraiment convaincants (pour une approche par les graphes voir [38], et surtout [10] où la connexion avec les sous-groupes est poursuivie). Le problème des invariants modulaires reste une épine (douloureuse) dans notre pied. L'article 5 décrit l'étude d'un sous-groupe particulier de $su(3)$ qui, même s'il ne s'est pas révélé être relié à un invariant modulaire, est un objet merveilleux.

7.3 Vers la courbe quartique de Klein

7.3.1 Le théorème d'Hurwitz

Nous allons retrouver brièvement la borne due à Hurwitz ([17]) sur le nombre d'automorphismes que peut avoir une surface de Riemann de genre plus grand que 1 (on se souvient qu'en genre 0 et 1 il y a toujours un groupe continu d'automorphismes, transformations de Moebius sur

la sphère, translations sur le tore). Soit donc S une surface de Riemann (compacte, connexe, sans bord) et G un groupe fini d'automorphismes (transformations biholomorphes) de S . Nous voulons montrer que S/G est encore une surface de Riemann (pour la topologie induite S/G est compact et connexe comme image continue d'un compact connexe). Comme S est compacte les transformations de G autres que l'identité ont un nombre fini de points fixes donc comme G est fini, les points de S laissés fixes par un sous-groupe non réduit à l'identité de G sont en nombre fini. On peut choisir pour chaque point P de S un voisinage ouvert U de P admettant une coordonnée locale z telle que $z(P) = 0$. On peut alors imposer les conditions suivantes: si $g \in G$ n'est pas dans le groupe d'isotropie de P (c'est à dire le sous-groupe de G laissant P fixe, noté H) $gU \cap U = \emptyset$ (on prend U assez petit pour que son adhérence ne contienne pas d'autres points de l'orbite de P que P , la réunion de l'adhérence des images de U distinctes de U est un fermé dont le complémentaire contient P , nous prenons son intersection avec U et gardons le même paramètre local, nous continuons à appeler U le nouveau voisinage obtenu) et que chaque U ne contient aucun point ayant un groupe d'isotropie non trivial, sauf peut être P (enlever les autres). Si $g \in H$, en utilisant la coordonnée locale sur U on obtient une application holomorphe sur un voisinage de l'origine, encore notée g définie par $g(z_{P'}) = z_{gP'}$ et qui vérifie $g(0) = 0, g'(0) \neq 0$. On peut alors choisir un voisinage assez petit de P que nous continuons à noter U tel que la fonction

$$t(z) = \prod_{g \in H} g(z)$$

soit bien définie et holomorphe. De plus t a un zéro d'ordre $|H|$ à l'origine donc $t \circ z$ prend exactement $|H|$ fois la même valeur sur un voisinage assez petit (toujours noté U) de P . Notons que si P a un groupe d'isotropie trivial t est simplement la coordonnée locale. Par définition de la topologie induite sur le quotient S/G on vérifie que t peut être choisi comme paramètre local sur un voisinage de la classe de P dans S/G et que les paramètres locaux se recollent de manière holomorphe. On remarque alors que π la projection de S dans S/G est une application holomorphe dont les points singuliers sont les points ayant un groupe d'isotropie non trivial. Au voisinage d'un tel point P , dans des cartes appropriées la projection s'écrit $\pi(z) = z^{|H|}$.

Nous allons maintenant établir une formule (un cas particulier de la formule de Riemann-Hurwitz) reliant le genre (ou la caractéristique d'Euler) de S à celui de S/G . Pour cela nous choisissons une triangulation $T_{G/S}$ de G/S , telle que toutes les valeurs singulières de π soient des sommets. L'image réciproque de cette triangulation de S/G est bien une triangulation (notée T_S) de S (grâce au fait que les valeurs singulières sont des sommets). Notons P_1, \dots, P_n les valeurs singulières (qui sont donc des points de S/G), H_1, \dots, H_n les groupes d'isotropie des images réciproques. Le nombre d'arêtes de T_S est $a_S = |G|a_{S/G}$, le nombre de faces de T_S est $f_S = |G|f_{S/G}$, le nombre de sommets T_S est $s_S = |G|s_{S/G} + \sum_i (|G|/|H_i| - |G|)$. Utilisant alors la formule (d'Euler) pour la caractéristique d'Euler on obtient

$$\chi_S = f_S - a_S + s_S = |G| \left(\chi_{S/G} - \sum_i (1 - 1/|H_i|) \right)$$

Si S est une sphère ou un tore ($\chi = 2, 0$), cette formule régleme sévèrement le nombre de points fixes et les groupes d'isotropie possibles des sous-groupes finis du groupe des automorphismes. Si S est une sphère, S/G doit en être une, il ne peut y avoir plus de quatre valeurs

critiques (car $1 - 1/|H_i| \geq 1/2$) et nous ne sommes pas loin de la classification des sous-groupes finis de $SO(3)$, isomorphe à $SU(2)/\{-1, 1\}$ sous-groupe compact maximal du groupe des automorphismes de la sphère. Si S est un tore S/G est soit un tore (auquel cas G agit sans points fixes, il ne contient que des translations) soit une sphère, avec au plus quatre valeurs singulières, que l'on reconnaît immédiatement si l'on écrit S comme $y^2 = p_4(x)$ où le second membre est un polynôme de degré 4, G étant engendré par $y \rightarrow -y$, la projection étant la fonction coordonnée x . Dans le cas du genre plus grand que 1, notre formule va nous donner une borne sur $|G|$. Comme χ_S est négatif on cherche à minimiser $-\left(\chi_{S/G} - \sum_i(1 - 1/|H_i|)\right)$. C'est un exercice d'algèbre élémentaire de vérifier que le minimum est obtenu si S/G est une sphère avec trois valeurs critiques, d'ordres de branchement respectifs 2, 3 et 7. On a donc

$$|G| \leq -42\chi_S$$

Nous avons donc démontré que les groupes finis d'automorphismes des surfaces de Riemann de genre g plus grand que 1 avaient un cardinal majoré par $84(g - 1)$. On peut prouver de plus que le groupe des automorphismes d'une surface de Riemann de genre g plus grand que 1 est fini (nous l'admettons). Ce théorème peut parfois, comme dans l'article 5, prouver qu'on a bien trouvé tous les automorphismes d'une surface de Riemann. Pour saturer la borne du théorème il faut qu'il existe une application holomorphe de la surface dans la sphère avec trois valeurs critiques et des indices de ramification 2, 3 et 7. Ceci cadre bien avec le recouvrement régulier (retrouvé dans l'article 5 mais connu de Klein) par des triangles hyperboliques d'angles $\pi/2$, $\pi/3$ et $\pi/7$ de la quartique de Klein (qui sature la borne).

7.3.2 Les courbes de genre 3 dans \mathbf{CP}^2

Mentionnons simplement le théorème suivant: les automorphismes d'une surface de Riemann de genre 3 plongée dans \mathbf{CP}^2 (sans point multiple) sont les traces de collinéations (c'est à dire d'automorphismes de \mathbf{CP}^2) ([17]). Ce théorème simplifie grandement comme on le voit la recherche des automorphismes, et replace dans un cadre un peu plus général le phénomène qui se produit pour la quartique de Klein ([25]). Ainsi, en cherchant les automorphismes d'une telle surface, on construit automatiquement une représentation de dimension 3 de ce groupe d'automorphismes, et un polynôme invariant de cette représentation.

Bibliography

- [1] V. Arnold, A. Varchenko, S. Goussein-Zadé, Singularités des applications différentiables, *Editions Mir, 1986.*
- [2] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov, Infinite symmetry in two dimensional quantum field theories *Nuclear Physics B241, 1984*
- [3] A. Cappelli, C. Itzykson, J.B. Zuber, The A.D.E. Classification of minimal and $A_1^{(1)}$ Conformal Field Theories, *Communications in Mathematical Physics 92, 1987.*
- [4] J.L. Cardy, Boundary conditions in conformal field theory, *Advanced Studies in Pure Mathematics 19, 1990.*
- [5] J.L. Cardy, Conformal invariance and surface critical behaviour, *Nuclear Physics B240, 1984.*
- [6] J.L. Cardy, Effect of boundary conditions on the operator content of two dimensional conformally invariant theories, *Nuclear Physics B275 [FS17], 1987.*
- [7] J.L. Cardy, Operator content of two dimensional conformally invariant theories, *Nuclear Physics B270 [FS16], 1986.*
- [8] P. Christe, F. Ravanini, $G_N \otimes G_L/G_{N+L}$ Conformal Field Theories and their Modular Invariant Partition Functions, *International Journal of Modern Physics A4, 1989.*
- [9] P. Degiovanni $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ conformal field theories, *Communications in Mathematical Physics 127, 1990.*
- [10] P. Di Francesco, J.B. Zuber, $SU(N)$ lattice integrable models associated with graphs *Nuclear Physics B338, 1990.*
- [11] D. Friedan, Introduction to Polyakov's string theory *les Houches, 1982.*
- [12] D. Friedan, S. Shenker, The analytic geometry of two dimensional conformal field theory *Nuclear Physics B281, 1987.*
- [13] D. Friedan, Z. Qiu, S. Shenker, Conformal invariance, unitarity and critical exponents in two dimensions, *Physical Review Letters 52, 1984.*

- [14] B.L. Feigin, D.B. Fuchs, Verma Modules over the Virasoro algebra, *Functional Analysis and Applications* 16, 1982.
- [15] D. Gepner, Z. Qiu, Modular invariant partition function for parafermionic field theories, *Nuclear Physics B285 [FS19]*, 1987.
- [16] P. Goddard, A. Kent, D. Olive, Virasoro algebras and coset space models, *Physics Letters* 152B, 1985.
- [17] R. Hartshorne, Algebraic geometry, *Springer*, 1977.
- [18] Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, *Springer*, 1980.
- [19] C. Huneke, An algebraist commuting in Berkeley, *The mathematical Intelligencer* 11, 1989.
- [20] C. Itzykson, Level one Kač-Moody characters and modular invariance, *Proceedings of the Annecy Workshop*, 1988.
- [21] C. Itzykson, J.B. Zuber, Two dimensional conformal invariant theories on a torus, *Nuclear Physics B275 [FS17]*, 1986.
- [22] V.G. Kač, Infinite dimensional Lie algebras, *Cambridge University Press* 1990.
- [23] V.G. Kač, A.K. Raina, Highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras, *World Scientific*, 1988.
- [24] T. Kawai, Singularity theory and the \mathbf{Z}_N charge structure of $N = 2$ superconformal field theory *Physics Letters* 229B, 1989.
- [25] F. Klein Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert, *Springer*, 1979.
- [26] B. Kostant, The McKay correspondance, the Coxeter element and representation theory, in *Colloque Elie Cartan, Astérisque*, 1985.
- [27] S. Lang, Algebra, *Addison Wesley*, 1984.
- [28] S. Lazzarini, R. Stora, Ward Identities for lagrangian conformal models, in *Knots, Topology and Field Theory*, 1989
- [29] S. Lazzarini, Thèse, *Annecy*, 1990
- [30] J. McKay, Cartan Matrices, finite groups of quaternions and Kleinian singularities, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1981.
- [31] G. Moore, N. Seiberg, Naturality in Conformal Field Theory. *Nuclear Physics B313*, 1989
- [32] G. Moore, N. Seiberg, Polynomial equations for rational conformal field theories, *Physics Letters* 212B, 1988.

- [33] V. Pasquier, Two dimensional critical systems labelled by Dynkin diagrams, *Nuclear Physics B285 [FS19], 1987.*
- [34] A.M. Polyakov, Quantum gravity in two dimensions, *Modern Physics Letters 103B, 1987*
- [35] A.M. Polyakov, Gauge fields and strings, *Harwood Academic Publishers, 1987.*
- [36] A.M. Polyakov, Two dimensional quantum gravity, *Les Houches 1988.*
- [37] A. Rocha-Caridi, Vacuum vector representations of the Virasoro algebra, in *Vertex operators in mathematics and physics, Springer, 1985.*
- [38] P. Roche, Ocneanu cell calculus and integrable lattice models, *Communications in Mathematical Physics 127, 1990.*
- [39] P. Ruelle, E. Thiran, J. Weyers, Modular invariants for affine $su(3)$ at prime height, *Communications in Mathematical Physics 133, 1990.*
- [40] P. Ruelle, Dimension of the commutant for the $SU(N)$ affine algebra, *Communications in Mathematical Physics 133, 1990.*
- [41] Shafarevich, Basic algebraic geometry, *Springer, 1977.*
- [42] N.A. Schellekens, N.P. Warner, Conformal subalgebras of Kač-Moody algebras, *Physical Review D34, 1986.*
- [43] J.P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, *Benjamin, 1966.*
- [44] P. Slodowy, Platonic solids Kleinian singularities and Lie groups, *Lecture Notes in Mathematics 1008, Springer, 1983.*
- [45] D. Smit, private communication
- [46] H. Sugawara, A field theory of currents, *Physical Review 170, 1968.*
- [47] E. Verlinde, Fusion rules and modular transformations in 2D conformal field theory, *Nuclear Physics B300 [FS22], 1988 .*
- [48] A. Weil, Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker, *Springer 1976.*
- [49] H. Weyl, The classical groups, *Princeton University Press, ???.*
- [50] E. Witten, Nonabelian bosonization, *Communications in Mathematical Physics 92, 1984.*
- [51] E. Witten, the central charge in three dimensions, in *Physics and Mathematics of Strings, World Scientific 1990.*
- [52] E. Witten, Gauge theories and integrable lattice models, *Nuclear Physics B322, 1989.*
- [53] E. Witten, Gauge theories, vertex models and quantum groups, *Nuclear Physics B330, 1990.*

- [54] E. Witten, Quantum field theory and the Jones polynomial, *Communications in Mathematical Physics* 121, 1989.
- [55] A.B. Zamolodchikov, Infinite additional symmetries in two dimensional conformal quantum field theories, *Theoretical and Mathematical Physics* 653, 1985.
- [56] J.B. Zuber, Discrete symmetries of conformal theories, *Physics Letters B* 176, 1987.

Annexe: publications